

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΘΕΜΑ 1°

**A.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 33

- B.**
- 1 → **Λάθος**
  - 2 → **Σωστό**
  - 3 → **Σωστό**
  - 4 → **Σωστό**

### ΘΕΜΑ 2°

**α)** Αφού το Μ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{και} \quad \psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2}$$

$$3 = \frac{1 + x_B}{2} \quad \text{και} \quad 2 = \frac{1 + \psi_B}{2}$$

$$6 = 1 + x_B \quad \text{και} \quad 4 = 1 + \psi_B$$

$$\mathbf{x_B = 5}$$

$$\text{και} \quad \mathbf{\psi_B = 3}$$

οπότε

$$\mathbf{B(5, 3)}$$

**β)**  $\vec{GM} = (3 - 4, 2 - 0) = (-1, 2)$

$$\vec{AB} = (5 - 1, 3 - 1) = (4, 2)$$

Είναι  $\vec{GM} \cdot \vec{AB} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0$

Οπότε  $\vec{GM} \perp \vec{AB}$

**γ)**  $\vec{GA} = (1 - 4, 1 - 0) = (-3, 1)$ , οπότε  $|\vec{GA}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$$\vec{GB} = (5 - 4, 3 - 0) = (1, 3), \quad \text{οπότε} \quad |\vec{GB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Άρα  $|\vec{GA}| = |\vec{GB}|$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

**α)**  $x^2 + \psi^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5$  ή  $A = -2\lambda$

$x^2 + \psi^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 5 = 0$  (1)  $B = 0$

$\Gamma = \lambda^2 - 5$

Είναι :  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0^2 - 4(\lambda^2 - 5) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 20 = 20 > 0$

**οπότε η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(\lambda, 0)$  και ακτίνα**

$\rho = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$  **για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$**

**β)** Για  $\lambda = 1$  ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) έχει κέντρο  $K(1, 0)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{5}$

**γ)** Για  $\lambda = 1$  ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) είναι:  $x^2 + \psi^2 - 2x - 4 = 0$   
Για να βρω τα κοινά σημεία του κύκλου και της ευθείας λύνω το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = x \\ x^2 + \psi^2 - 2x - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \psi = x \\ x^2 + x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \psi = x \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi = x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \psi = x \\ x = 2 \text{ ή } x = -1 \end{array} \right\}$$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$$

**Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου είναι τα  $A(2, 2)$  ,  $B(-1, -1)$**

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

- α)** Αφού τη χρονική στιγμή  $t=5$  το πλοίο διέρχεται από το σημείο  $A(7,13)$  άρα έχουμε:

$$2 + \kappa \cdot 5 = 7 \quad \text{και} \quad \lambda + 2 \cdot 5 = 13$$

$$5\kappa = 7 - 2 \quad \lambda + 10 = 13$$

$$5\kappa = 5 \quad \lambda = 13 - 10$$

$$\kappa = 1$$

$$\lambda = 3$$

- β)** Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  η θέση  $M$  του πλοίου είναι :  $M(2+t, 3+2t)$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + t \\ \psi = 3 + 2t \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left. \begin{array}{l} t = x - 2 \\ \psi = 3 + 2t \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{ή} \quad \psi = 3 + 2(x - 2) \\ \text{ή} \quad \psi = 3 + 2x - 4 \\ \text{ή} \quad \psi = 2x - 1 \end{array}$$

**οπότε το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε)  
:  $\psi = 2x - 1$**

- γ)** Αφού το δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο κινείται σε ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 2$ . Κάθε διάνυσμα κάθετο στην ευθεία αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda' = -\frac{1}{2}$

Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το  $\vec{\delta} = (2, -1)$  με μέτρο  $|\vec{\delta}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Ένα τέτοιο διάνυσμα που να έχει μέτρο 1 (μοναδιαίο διάνυσμα) είναι το

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{\delta}|} \cdot \vec{\delta} = \frac{\sqrt{5}}{5} (2, -1) = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$