

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB .
 Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Μονάδες 15

- B.** Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**B.1**, **B.2**, **B.3** και **B.4**) και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.
2. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει:
 Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντιστρόφως.
3. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O η εξίσωση $x^2 = 2py$ με $p \neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο O .
4. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής
 $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2\mu + 1, \lambda - 2)$, $\Gamma(4, 0)$ και $M(3, 2)$, όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

Μονάδες 10

- β)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Gamma M}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 10

- γ)** Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{\Gamma A}| = |\vec{\Gamma B}|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 10

- β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 6

- γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση $y = x$ και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς– Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση M του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι $M(2 + kt, \lambda + 2t)$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Τη χρονική στιγμή $t = 5$ το πλοίο διέρχεται από το σημείο $A(7, 13)$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των k, λ .

Μονάδες 7

- β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 1$.

Μονάδες 10

- γ) Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες 8

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ