

ΘΕΜΑ 1°

A. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 95- 96)

- B.** 1. → Λάθος
2. → Σωστό
3. → Σωστό
4. → Σωστό
5. → Σωστό

ΘΕΜΑ 2°

$$a_4 = 810$$
$$a_5 = 2430$$

Επειδή είναι γεωμετρική πρόοδος

α. $\lambda = \frac{a_5}{a_4} = \frac{2430}{810} = 3$

β. Από την σχέση $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$ για $v=4$
Έχουμε $a_4 = a_1 \cdot \lambda^3$

Λύνουμε ως προς a_1 για $\lambda = 3$ και προκύπτει $a_1 = \frac{810}{27} = \mathbf{30}$

γ. Από τον τύπο $S_n = \frac{a_1 \cdot (\lambda^n - 1)}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$

για $n=6$, $a_1=30$ και $\lambda=3$ προκύπτει $S_6 = \frac{30(3^6 - 1)}{3 - 1} = \mathbf{10920}$

ΘΕΜΑ 3°

Από τον θεμελιώδη νόμο της τριγωνομετρίας έχουμε

$$\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και επειδή η γωνία α είναι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ άρα $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Όμοια } \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

και $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ άρα $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{1}$

$$\sigma\upsilon\nu 2\beta = 1 - 2\eta\mu^2\beta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
 $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

γ. $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$$

 $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ΘΕΜΑ 4°

α. Για $k=3$ το πολυώνυμο γίνεται:
Εφαρμόζω σχήμα Horner για $x=3$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

1	-	-	1	3
	2	3		
	3	3	0	
1	1	0	1	

Από την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης προκύπτει:
 $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x - 3)(x^2 + x) + 1$

Άρα το ηλίκο είναι: $x^2 + 1$

και το υπόλοιπο: 1

- β.** Για να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα πρέπει να έχει ρίζα τον διαιρέτη του σταθερού της όρου, δηλ. 1 ή -1 .

Άρα $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$

ή
 $P(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 - \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$

- γ.** Για $\kappa = 0$ έχουμε την $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

α' τρόπος (Με παραγοντοποίηση)

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x - 1) - (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{ή } x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ή} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

β' τρόπος (Με σχήμα Horner)

Από το (β) ερώτημα για $\kappa = 0$ έχει ρίζα το 1 άρα εφαρμόζω σχήμα Horner για $x + 1$.

1	-	0	1	1
	2			
	1	-	-1	
		1		
1	-	-	0	
	1	1		

Δηλαδή η εξίσωση γίνεται $(x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{ή} \quad x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$