

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΘΕΜΑ 1°

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 232

- B.**
1. **Σωστό**
 2. **Σωστό**
 3. **Λάθος**
 4. **Λάθος**
 5. **Σωστό**

ΘΕΜΑ 2°

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$$

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x-2} = \frac{3}{2}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ άρα $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 + 2x}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

άρα $\beta = -1$

Δηλ. η $\psi = x - 1$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

γ) Η f παραγωγίσιμη

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x}{x - 2} \right)' = \frac{(2x - 3)(x - 2) - (x^2 - 3x) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2} > 0 &\Leftrightarrow (x - 2)^2 (x^2 - 4x + 6) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 > 0 \quad \text{αφού } (x - 2)^2 > 0 \text{ στο } \mathbb{R} - \{2\} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $x < 5$ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 = 25$

$x > 5$ $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (10x - 25) = 50 - 25 = 25$

και $f(5) = 25$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) = 25$ **η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$**

β) $x < 5$ $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x+5) = 10$

$x > 5$ $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10x - 25 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10x - 50}{x - 5} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10(x - 5)}{x - 5} = 10$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 10$

γ) $f(5) = 25$

$A(5, 25)$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(5, 25)$ έχει εξίσωση:

$\psi - f(5) = f'(5)(x - 5)$ ή

$\psi - 25 = 10(x - 5)$ ή

$\psi = 10x - 50 + 25$

$\psi = 10x - 25$

δ) **$x < 5$**

Η f παραγωγίσιμη $f'(x) = (x^2)' = 2x$

$f'(x) = 0$ ή $2x = 0$ ή $x = 0$

$f'(x) > 0$ ή $2x > 0$ ή $0 < x < 5$

$f'(x) < 0$ ή $2x < 0$ ή $x < 0$

$x > 5$

Η f παραγωγίσιμη $f'(x) = (10x - 25)' = 10 > 0$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$		Τ.Ε.		

Απ' τον πίνακα προκύπτει ότι η f για $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο

α.

$$w = \frac{i(i+x+yi)}{i-x-yi}$$

$$w = \frac{-1+xi-y}{-x+(1-y)i} = \frac{-1-y+xi}{-x+(1-y)i} \cdot \frac{[(1+y)-xi][x-(y-1)i]}{[(1+y)-xi][x-(y-1)i]} =$$

$$= \frac{x(1+y)-(y+1)(y-1)i-x^2i+x(y-1)i^2}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x+xy-y^2i+i-x^2i-xy+x}{x^2+(y-1)^2} = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}i$$

β. Αφού $w \in \mathbb{R}$ άρα $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2} = 0$
 δηλ. $x^2+y^2=1$ δηλ. κύκλος $K(0,0)$ και ακτίνας $\rho_1=1$
 Επειδή $z \neq i$ εξαιρείται το σημείο $(0,1)$ του παραπάνω κύκλου που τον επαληθεύει.

Άρα η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ ακτίνας $\rho_1=1$ εκτός του σημείου $(0,1)$.

γ. Αφού ο $z \in \mathbb{R}$ άρα $y=0$. Τότε ο w γίνεται: $w = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^2+1}i$
 έστω $w = a + \beta \cdot i$
 άρα $\frac{2x}{x^2+1} = a$ και $\frac{1-x^2}{x^2+1} = \beta$

Για να ανήκει ο w σε κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho_2=1$ πρέπει $a^2 + \beta^2 = 1$

$$\begin{aligned}\text{δηλ. } a^2 + b^2 &= \frac{(2x)^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{(1 - x^2)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 1 - 2x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^2} = 1\end{aligned}$$

Πράγματι $a^2 + b^2 = 1$

Δηλ. η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho_2=1$.