

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. σχολικό βιβλίο, σελ. 45

B. $\alpha \rightarrow \text{Σωστό}, \beta \rightarrow \text{Λάθος}, \gamma \rightarrow \text{Σωστό}, \delta \rightarrow \text{Λάθος}$

Γ. α. σχολικό βιβλίο σελ. 146

β. σχολικό βιβλίο σελ. 89

ΘΕΜΑ 2ο

A. Έστω $\alpha = 2\rho$, τότε: $\alpha^3 = (2\rho)^3 = 8\rho^3 = 8\kappa$.

Έστω τώρα ότι $\alpha = 2\rho + 1$, τότε:

$$\alpha^3 = (2\rho + 1)^3 = 8\rho^3 + 12\rho^2 + 6\rho + 1 = 2 \cdot (4\rho^3 + 1) = 2\kappa + 1. \text{ με } \kappa$$

B. Αν $\alpha = 2\rho$ τότε $\alpha(\alpha^2 + 1) = 2\rho(4\rho^2 + 1) = 2\kappa$ άρτιος

Αν $\alpha = 2\rho + 1$ τότε:

$$\alpha(\alpha^2 + 1) = (2\rho + 1)[(2\rho + 1)^2 + 1]$$

$$= (2\rho + 1)(4\rho^2 + 4\rho + 1 + 1) = (2\rho + 1)(4\rho^2 + 4\rho + 2) = (2\rho + 1) \cdot 2 \cdot (2\rho^2 + 2\rho + 1) = 2\kappa \text{ άρτιος.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

A. Για το σημείο A έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda - 1 \\ y &= 3\lambda + 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda &= \frac{x+1}{2} \\ y &= 3 \cdot \frac{x+1}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{3x+3}{2} + 2 \end{aligned}$$

Άρα το σημείο A κινείται στην ευθεία (ε): $y = \frac{3x+3}{2} + 2$ εξαιρουμένου του σημείου που προκύπτει για $\lambda = -2$ δηλαδή του $(-5, -4)$.

B.α. Για $\lambda = 1$ έχουμε τα σημεία: A(1,5), B(1,2), Γ(2,3) οπότε: $(AB\Gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$

β. Είναι: $\lambda_{BG} = \frac{3-2}{2-1} = 1 \Rightarrow BG: y-2 = x-1 \Rightarrow x-y+1=0$

Επειδή η BG εφάπτεται του κύκλου, θα ισχύει:

$$d(A, BG) = \rho \Rightarrow \frac{|1-5+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ο κύκλος έχει εξίσωση: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9/2$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Η έλλειψη γράφεται: $\frac{4x^2}{3p^2} + \frac{2y^2}{3p^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{3p^2}{2}$,

$$b^2 = \frac{3p^2}{4} \Rightarrow \gamma^2 = a^2 - b^2 = \frac{3p^2}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3} \cdot p}{2}$$

Οι εστίες είναι: $E(0, \frac{\sqrt{3} \cdot p}{2})$ και $E'(0, -\frac{\sqrt{3} \cdot p}{2})$

Β. Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ 4x^2 + 2y^2 &= 3p^2 \end{aligned} \Rightarrow 4x^2 + 4px - 3p^2 = 0$$

με $\Delta = 64p^2$ και $x_{1,2} = \frac{-4p \pm 8p}{8} = \frac{p}{2}$ ή $-\frac{3p}{2} < 0$ απορρίπτεται γιατί $x > 0$

Με $x = \frac{p}{2} \Rightarrow y = \pm p$

Τα σημεία τομής είναι: $K(\frac{p}{2}, p)$ και $\Lambda(\frac{p}{2}, -p)$

Γ. Στο $K(\frac{p}{2}, p)$ η εφαπτομένη της παραβολής είναι $(\epsilon_1): y \cdot p = p(x + \frac{p}{2})$ με $\lambda_{\epsilon_1} = 1$

ενώ η εφαπτομένη της έλλειψης είναι $(\epsilon_2): 4 \cdot \frac{p}{2} x + 2py = 3p^2$ με $\lambda_{\epsilon_2} = -1$

Επειδή $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = -1 \Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Ρούτσης Θανάσης - Μαθηματικός
Γκιούλος Θεόδωρος - Μαθηματικός
Φροντιστήριο "ΕΠΙΛΟΓΗ" - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>