

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν $\vec{a}, \vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}.$$

Μονάδες 7

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ (δηλαδή τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

- β.** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

- γ.** Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ όπου } b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες 2

- δ.** Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ έχουμε $\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$.

Μονάδες 2

- Γ. α.** Αν a, b είναι δύο ακέραιοι με $b \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο b διαιρεί τον a ;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

A. Ο αριθμός a^3 παίρνει την μορφή: $a^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ ή $a^3 = 2k+1$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 12

B. Ο αριθμός $a(a^2+1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

B. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή Α(1,5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε' της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και

$$E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $L\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**