

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2003
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
 ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

- Α. Θεωρία βιβλίου σελ. 95
 Β. Σωστό το γ
 Γ. Σωστό το β
 Δ. Σωστό το α
 Ε.
 α. άθροισμα
 β. γεωμετρικής
 γ. $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε $\sin x \cdot (\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sin 2x + 4\sin x + 1) \cdot \eta\mu x$
 $\Leftrightarrow \sin x \cdot (2\eta\mu x \cdot \sin x + 4\eta\mu x) = (2\sin^2 x - 1 + 4\sin x + 1) \cdot \eta\mu x$
 $\Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sin x \cdot (\sin x + 2) = 2\sin x \cdot \eta\mu x \cdot (\sin x + 2)$ που ισχύει

Για την εξίσωση έχουμε: $\sin 2x + 4\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 + 4\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot (\sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2 \text{ Αδύνατη} \\ \text{ή} \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2κπ + \frac{\pi}{2} \\ x = 2κπ - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 3ο

- α. Είναι: $a_{n+1} = -11 + 2(n+1) = -11 + 2n + 2 = -9 + 2n$
 Οπότε: $a_{n+1} - a_n = -9 + 2n - (-11 + 2n) = -9 + 2n + 11 - 2n = 2$
 Άρα η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 2$ και $a_1 = -11 + 2 \cdot 1 = -9$

- β. Το ζητούμενο άθροισμα γράφεται:

$$\begin{aligned}
 S &= S_{21} - S_{11} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20\omega) - \frac{11}{2}(2a_1 + 10\omega) = \\
 &= \frac{21}{2}(-18 + 40) - \frac{11}{2}(-18 + 20) = \\
 &= \frac{21}{2}(-18 + 40) - \frac{11}{2}(-18 + 20) = \\
 &= \frac{21}{2} \cdot 22 - \frac{11}{2} \cdot 2 = 21 \cdot 11 - 11 = 220
 \end{aligned}$$

- γ. $P(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2(x-3) - (x-3) = 0 \Leftrightarrow$
 $(x-3)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$
 $x-3 = 0 \text{ ή } x^2-1 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 3 \text{ ή } x = \pm 1$

Από τον τύπο $a_n = a_1 + (n-1)\omega$ διαδοχικά για

$a_n = 3, a_n = 1, a_n = -1$ έχουμε:

$$3 = -9 + (n-1)2$$

$$3 = -9 + 2n - 2$$

$$3 = -11 + 2n$$

$$2n = 14$$

$$n = 7$$

δηλαδή $a_7 = 3$

$$\text{Ακόμα } 1 = -9 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 1 = -9 + 2n - 2 \Leftrightarrow$$

$$1 = -11 + 2n \Leftrightarrow$$

$$2n = 12 \Leftrightarrow n = 6$$

δηλαδή $a_6 = 1$

$$\text{Τέλος } -1 = -9 + (n-1) \cdot 2$$

$$-1 = -9 + 2n - 2$$

$$-1 = -11 + 2n$$

$$2n = 10$$

$$n = 5$$

Δηλαδή δηλαδή $a_5 = -1$

Άρα είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$$e^{2x} - 2e^x + 3 > 0 \quad (1)$$

Θέτω $e^x = y$ οπότε:

$$y^2 - 2y + 3 > 0 \quad (2)$$

Όμως $\Delta = 4 - 12 < 0$, το τριώνυμο είναι πάντα θετικό, δηλ. $y \in \mathbb{R}$ άρα $e^x \in \mathbb{R}$ δηλ. $x \in \mathbb{R}$

Έτσι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Για την g πρέπει: $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Δηλ. το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$

$$\beta. f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln[3 \cdot (e^x - 1)] \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 2e^x + 3 = 3 \cdot e^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

Θέτω $e^x = y$ οπότε έχουμε $y^2 - 5y + 6 = 0$

$$\text{Είναι: } \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3 \text{ ή } 2$$

Άρα:

- $y = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

- $y = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$$\gamma. f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln[9(e^x - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 3 > 9(e^{2x} - 2e^x + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 3 > 9e^{2x} - 18e^x + 9$$

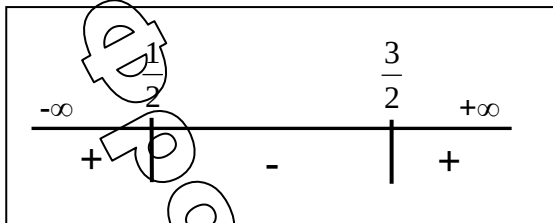
$$\Leftrightarrow 8e^{2x} - 16e^x + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4e^{2x} - 8e^x + 3 < 0$$

Θέτω $e^x = y$ οπότε έχουμε: $4y^2 - 8y + 3 < 0$

$$\text{Το τριώνυμο έχει ρίζες: } y_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{8} = \frac{3}{2} \text{ ή } \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο θα είναι:



Άρα πρέπει: $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

Δηλαδή: $\frac{1}{2} < e^x < \frac{3}{2}$

Άρα: $\ln \frac{1}{2} < x < \ln \frac{3}{2}$

Και επειδή $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 < 0$

ενώ έχουμε βρει ότι πρέπει $x > 0$ (από την τομή των πεδίων ορισμού f, g)

Τελικά $0 < x < \ln \frac{3}{2}$

Επιμέλεια απαντήσεων
Γκιόλλος Θεόδωρος – Μαθηματικός
Ρούτση Θανάσης – Μαθηματικός
Φροντιστήριο "ΕΠΙΛΟΓΗ"
<http://www.epil.gr>