

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σελ. 334-335

B.1. Θεωρία σελ. 225

B.2. α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό (θεωρώντας ότι f' συνεχής)

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(3) + f(13) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z = -iz + z + iz - z = 0$

β. $f(13) = i^{13} z = Iz = i\rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) = \left(\sin\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) =$
 $= \rho\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$

γ. Οι κορυφές είναι $O(0,0)$, $A(z)$, $B(iz)$. Ο iz στρέφει κατά 90° τη διανυσματική ακτίνα του z

Δηλ $\overline{OA} \perp \overline{OB}$

Άρα: $E = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2}|z| \cdot |iz| = \frac{1}{2}2 \cdot 2 = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση έχω $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
 $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ και επειδή $f \circ g$ είναι '1-1' θα έχω $x_1 = x_2$

β. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$
 $f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1$
 $x^3 - 3x + 1 = 0$

Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 Έχω $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-	+
$h(x)$				

Hand-drawn annotations on the table:
 - A blue arrow points from $-\infty$ to -1, labeled with a circled '1'.
 - A blue arrow points from -1 to 1, labeled with a circled '2'.
 - A blue arrow points from 1 to $+\infty$, labeled with a circled '3'.
 - A circled '0' is next to the $h(x)$ row under the $-\infty$ column.

Στο $(-\infty, -1]$ η h συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Το σύνολο τιμών είναι $(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(-1)] = (-\infty, 3]$

Άρα υπάρχει μοναδική αρνητική ρίζα στο $(-\infty, -1]$

Στο $(-1, 1]$ η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα

Το σύνολο τιμών είναι $[h(1), h(-1)] = [-1, 3]$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα στο $[-1, 1]$

Όμως η συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολωνομική

$$h(0) = 1$$

$$h(1) = -3$$

$$\text{Οπότε } h(0) \cdot h(1) = -3 < 0$$

Άρα ισχύει το θεώρημα του Bolzano δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ τέτοια ώστε $h(x_0) = 0$.

Τελικά υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[-1, 1]$

Στο $[1, +\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών είναι

$[h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)] = [-1, +\infty)$. Άρα υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι: $h(x) > g(x) \Rightarrow h(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b (h(x) - g(x)) dx > 0$

$$\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \text{ δηλ. } \int_a^b h(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

β.ι. Είναι $f(x) \cdot e^{-f(x)} = x - 1$

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{f(x)}}} = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x > 0$

θα είναι $f(x) > f(0)$ δηλαδή $f(x) > 0$

ii. Παίρνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά

Για την πρώτη έχουμε $f(x) > \frac{x}{2}$ δηλαδή $2f(x) - x > 0$

Θεωρούμε $h(x) = 2f(x) - x$.

Η h παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = 2f'(x) - 1 = \frac{2e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}} - 1 = \frac{2e^{f(x)} - 1 - e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}} = \frac{e^{f(x)} - 1}{1+e^{f(x)}}$$

Αλλά $f(x) > 0$ για $x > 0$ οπότε $e^{f(x)} > e^0$ δηλ $e^{f(x)} > 1$

Άρα $h'(x) > 0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $h(x) > h(0)$ δηλ $2f(x) - x > 0$

$$2f(x) - x > 0$$

$$f(x) > \frac{x}{2}$$

Για τη δεύτερη έχουμε $f(x) < x \cdot f'(x) \Rightarrow x \cdot f'(x) - f(x) > 0$

Έστω $g(x) = x f'(x) - f(x)$

Θα είναι: $g'(x) = f'(x) + x f''(x) - f'(x) = x f''(x)$ (1)

$$\text{Αλλά: } f''(x) = \frac{1}{(1+e^{-f(x)})^2} (1+e^{-f(x)})' = \frac{f'(x)e^{-f(x)}}{(1+e^{-f(x)})^2} > 0 \quad (2)$$

Για $x > 0$ η σχέση (1) λόγω της (2) δίνει: $g'(x) > 0$ οπότε η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα: για $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow x f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow x f'(x) > f(x)$

iii. Η $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

$$\text{Άρα: } E = \int_0^1 f(x) dx$$

$$f(x) > \frac{x}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 \frac{x}{2} dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} \Rightarrow E > \frac{1}{4}$$

$$\text{και } f(x) < x f'(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx < [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx < f(1) \Rightarrow 2E < f(1) \Rightarrow E < \frac{1}{2} f(1)$$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Γκιούλος Θόδωρος – Μαθηματικός
Ρούτσης Θανάσης – Μαθηματικός
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ «ΕΠΙΛΟΓΗ»
<http://www.epil.gr>