

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 9

- B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

- 1.** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

- 2.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

- 3.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2

- 4.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό

σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ ισχύει :

$$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Μονάδες 2

8. Για το μιγαδικό αριθμό i ισχύει : $i^4 = 1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1+i$, $z_2 = 3-4i$

- α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 + 5z_2$

Μονάδες 6

- β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_2}{z_1}$

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι: $\text{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8 .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & , \text{ αν } x < 2 \\ x - 2 & \\ -x^2 + k & , \text{ αν } x \geq 2 \end{cases}$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

α. το k , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$,

Μονάδες 7

β. το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

Μονάδες 5

γ. το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ και

Μονάδες 5

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x+3}$ στο $-\infty$.

Μονάδες 8