

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002 Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία

B.

- | | | |
|----------|---|---|
| 1 | → | Σ |
| 2 | → | Λ |
| 3 | → | Λ |
| 4 | → | Σ |
| 5 | → | Σ |
| 6 | → | Λ |
| 7 | → | Λ |
| 8 | → | Σ |

ΘΕΜΑ 2ο

α. $z_1 + 5z_2 = (-1+i) + 5(3-4i) = -1+i+15-20i = 14-19i$

β. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{(3-4i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-3+3i+4i+4}{(-1)^2+i^2} = \frac{1+7i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

γ. $z_1 = -1+i$
 $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \\ \eta\mu\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left[\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} + i\eta\mu\frac{3\pi}{4} \right]$$

επειδή $0 \leq \frac{3\pi}{4} < 2\pi$ άρα $Arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

δ. $z_1^8 = 2^4 \left[\sigma\upsilon\nu \frac{24\pi}{4} + i\eta\mu \frac{24\pi}{4} \right] = 2^4 [\sigma\upsilon\nu 6\pi + i\eta\mu 6\pi] =$
 $= 2^4 (\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0) = \boxed{2^4}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $A = \mathbb{R}$.

Η f παραγωγίσιμη.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[1, 3]$

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[3, +\infty)$

Για $x = 1$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2$

Για $x = 3$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** το $f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2$

β. $f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) - 2 = -1 - 6 - 9 - 2 = -18$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 12(-1) + 9 = 3 + 12 + 9 = 24$$

$$\psi - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

$$\psi + 18 = 24(x + 1) \quad \text{ή}$$

$$\psi = 24x + 24 - 18 \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\psi = 24x + 6}$$

γ. $f(0) = -2$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 1 - 6 + 9 - 2 = 2$$

$$f(0) \cdot f(1) = (-2)(2) = -4 < 0$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα πραγματική στο $(0, 1)$.

Όμως επειδή στο $[0, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)(x-2)}{x-2} = 2(2+2) = 2 \cdot 4 = 8$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + k) = -4 + k$$

Πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + k)$ ή $8 = -4 + k$ άρα $k = 12$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3$

γ. Η f παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ ως πολ/κή με $f'(x) = (-x^2 + k) = -2x$

άρα και στο $x = 4$ με $f'(4) = -2 \cdot 4 =$ -8

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ είναι -8 .

δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{f(x)}{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 - 4x}{x-2}}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 6x} =$ 1

Άρα $\lambda = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - \lambda \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x+3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{(x+3)(x-2)} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x - x(x^2 - 2x + 3x - 6)}{x^2 - 2x + 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x - x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 6x}{x^2 - 2x + 3x - 6} =$$
 -1

Άρα $\beta = -1$.

Δηλαδή $\psi = x - 1$