

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

- A. θεωρία σελ. 41
 B. θεωρία σελ. 42
 Γ. $\alpha \rightarrow \text{Σωστό}, \beta \rightarrow \text{Λάθος}, \gamma \rightarrow \text{Λάθος}, \delta \rightarrow \text{Σωστό}$
 Δ. $\alpha \rightarrow 2, \beta \rightarrow 3, \gamma \rightarrow 1, \delta \rightarrow 6$

ΘΕΜΑ 2ο

- A. Έστω α, β περιττοί ακέραιοι δηλαδή $\alpha = 2\kappa + 1, \beta = 2\lambda + 1, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$
 Τότε $\alpha \cdot \beta = (2\kappa + 1)(2\lambda + 1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1$
 $= 2(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1 = 2\mu + 1$, περιττός ακέραιος, ($\mu \in \mathbb{Z}$)
- B. Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε α είναι άρτιος ή περιττός δηλ θα έχει τη μορφή: $\alpha = 2\kappa$ ή $\alpha = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Αν $\alpha = 2\kappa$ τότε: $\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{2} = \frac{2\kappa(4\kappa^2 + 1)}{2} = \kappa(4\kappa^2 + 1) \in \mathbb{Z}$
 - Αν $\alpha = 2\kappa + 1$ τότε: $\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{2} = \frac{(2\kappa + 1)[(2\kappa + 1)^2 + 1]}{2} =$

$$\frac{(2\kappa + 1)(4\kappa^2 + 4\kappa + 1 + 1)}{2} = \frac{(2\kappa + 1)(4\kappa^2 + 4\kappa + 2)}{2} =$$

$$\frac{(2\kappa + 1)2(2\kappa^2 + 2\kappa + 1)}{2} = (2\kappa + 1)(2\kappa^2 + 2\kappa + 1) \in \mathbb{Z}$$
- Γ. Έστω $\alpha = 2\kappa + 1$
 Από το ερώτημα B είναι:

$$\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{2} = (2\kappa + 1)(2\kappa^2 + 2\kappa + 1) =$$

$$= (2\kappa + 1)(2\kappa^2 + 2\kappa + 1)$$

$$= 4\kappa^3 + 4\kappa^2 + 2\kappa + 2\kappa^2 + 2\kappa + 1$$

$$= 2(2\kappa^3 + 2\kappa^2 + \kappa + \kappa^2 + \kappa) + 1$$

$$= 2\rho + 1, \text{ περιττός, ακέραιος, } (\rho \in \mathbb{Z})$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Από τις $\psi^2 = 4x$ και $\psi^2 = 2\rho x$ συμπεραίνω ότι $\rho = 2$.

Άρα η παραβολή έχει εστία $E(\frac{\rho}{2}, 0)$ δηλαδή $E(1, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{\rho}{2}$
 δηλαδή $\delta: x = -1$.

B. Αφού η ευθεία διέρχεται από το $E(1, 0)$ θα έχει τη μορφή

$$(\varepsilon): \psi - 0 = \lambda(x - 1)$$

$$\psi = \lambda x - \lambda$$

$$\Rightarrow (\varepsilon): \lambda x - y - \lambda = 0$$

Από τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία έχω:

$$d(O, \varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2|\lambda| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Rightarrow$$

$$4\lambda^2 = 2(\lambda^2 + 1) \Rightarrow 4\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2 \Rightarrow 2\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Άρα έχουμε τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x - y - 1 = 0$$

$$(\varepsilon_2): -x - y + 1 = 0$$

Γ. Αν (x_1, y_1) το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την παραβολή, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $(\varepsilon) yy_1 = \rho(x + x_1)$

$$\text{δηλαδή } yy_1 = 2(x + x_1)$$

$$y = \frac{2}{y_1}(x + x_1)$$

Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$
 (επειδή είναι παράλληλη με την $y = x - 1$)

$$\text{Οπότε } \frac{2}{y_1} = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

Όμως το σημείο, (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή άρα $y_1^2 = 4x_1 \Rightarrow 2^2 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = 1$

Η εφαπτομένη είναι η $(\varepsilon): y \cdot 2 = 2(x + 1)$

$$2y = 2(x + 1)$$

$$y = x + 1$$

ΘΕΜΑ 4ο

A. $x^2 + y^2 - 2x\sin\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$

$$x^2 - 2x\sin\theta + \sin^2\theta + y^2 - 2y\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta = 1 + \sin^2\theta + \eta\mu^2\theta$$

$$(x - \sin\theta)^2 + (y - \eta\mu\theta)^2 = 2$$

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο $K(\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

B. Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ ο κύκλος γίνεται:

$$C: \left(x - \sin \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \eta\mu \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2$$

$$C: x^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη στο $M(1, 2)$ έχει μορφή (ε): $y-2 = \lambda(x-1)$

$$y-2 = \lambda x - \lambda \Rightarrow (\varepsilon): \lambda x - y - \lambda + 2 = 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη του C θα πρέπει:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \text{ δηλ. } \frac{|\lambda \cdot 0 - 1 - \lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |-\lambda + 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 2(\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Άρα η εφαπτομένη είναι η

$$(\varepsilon): -x - y + 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$-x - y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x + y - 3 = 0$$

Γ. Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι $K(\sin \theta, \eta\mu \theta)$ δηλαδή

$$x = \sin \theta \text{ και } y = \eta\mu \theta \Rightarrow x^2 = \sin^2 \theta \text{ και } y^2 = \eta\mu^2 \theta$$

$$\text{Άρα } x^2 + y^2 = \sin^2 \theta + \eta\mu^2 \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

δηλαδή τα κέντρα ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Επιμέλεια απαντήσεων:
Θόδωρος Γκιούλος – Μαθηματικός
Θανάσης Ρούτσης – Μαθηματικός
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ «ΕΠΙΛΟΓΗ»
<http://www.epil.gr>