

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 215

A2.

- $\alpha \rightarrow$ Σωστό
 $\beta \rightarrow$ Σωστό
 $\gamma \rightarrow$ Λάθος
 $\delta \rightarrow$ Λάθος
 $\epsilon \rightarrow$ Λάθος

B. α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 238 , 239

β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 239

ΘΕΜΑ 2ο

α. $2\mu_a^2 - \beta \cdot \gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow [\text{τύπος δοσμένων}] \Rightarrow 2 \cdot \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} - \beta \cdot \gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{2} - \beta \cdot \gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta \cdot \gamma = \alpha^2 \Rightarrow$$

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma = \alpha^2 + \alpha^2 \Rightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma = 2\alpha^2$$

$$\text{Άρα } \beta^2 + \gamma^2 - \beta \cdot \gamma = \alpha^2 \quad (1)$$

β. Εφαρμόζοντας νόμο συνημιτόνων έχουμε :
 $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A \quad (2).$

Από (1), (2) παίρνουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A \Rightarrow -\beta\gamma = -2\beta\gamma \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

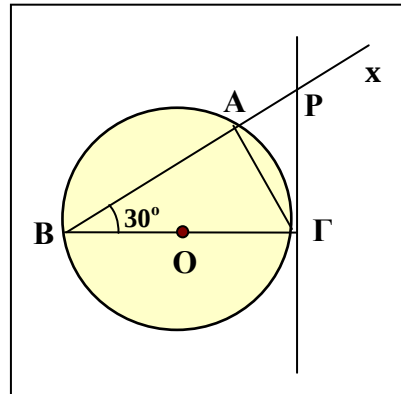
$$\text{Άρα } \hat{A} = 60^\circ.$$

ΘΕΜΑ 3ο

- α. Είναι $\hat{A} = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι

$$A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \text{ δηλ } A\Gamma = \frac{2R}{2} \Rightarrow A\Gamma = R$$



- β. Επειδή ΡΓ εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα $\Rightarrow \hat{B}\hat{\Gamma}P = 90^\circ$.

Τα τρίγωνα ΡΒΓ, ΡΑΓ είναι όμοια (ορθογώνια και $\hat{P} = \text{κοινή}$), με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{2R}{R} = 2 \text{ Άρα } \frac{(P\hat{B}\hat{\Gamma})}{(P\hat{A}\hat{\Gamma})} = \lambda^2 = 2^2 = 4$$

- γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΓΒ επειδή $\hat{B} = 30^\circ$ θα είναι:

$$P\Gamma = \frac{PB}{2} \Rightarrow PB = 2P\Gamma$$

Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΡΓΒ παίρνουμε:

$$PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow (2P\Gamma)^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow 4P\Gamma^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$3P\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Rightarrow 3P\Gamma^2 = (2R)^2 \Rightarrow 3P\Gamma^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$P\Gamma^2 = \frac{4R^2}{3} \text{ Άρα } P\Gamma = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow P\Gamma = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο

- α. Επειδή AB = 7 και AE = 3 $\Rightarrow BE = 7 - 3 = 4$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο

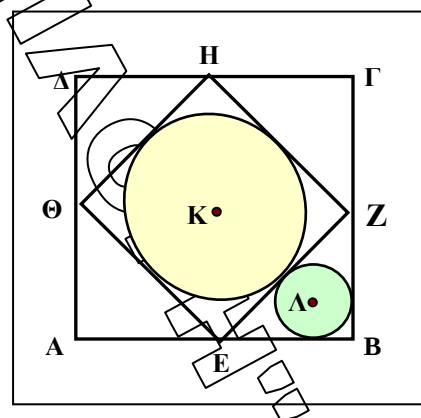
τρίγωνο EΒZ έχουμε: $EZ^2 = BE^2 + BZ^2$

$$EZ^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow EZ^2 = 16 + 9$$

$$EZ^2 = 25$$

$$EZ = 5 \text{ cm}$$

Άρα το τετράγωνο EZHΘ έχει εμβαδό ($EZH\Theta$)
 $= 5^2 = 25 \text{ cm}^2$



- β. Το ορθογώνιο τρίγωνο EBZ έχει εμβαδό:

$$(EBZ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \nu = \frac{1}{2} BE \cdot BZ = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 \Rightarrow (EBZ) = 6 \text{ cm}^2$$

Όμως ισχύει ο τύπος $(EBZ) = \tau \cdot \rho$ (1) όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ)

$$\text{και } \tau = \frac{BE + BZ + ZE}{2} \Rightarrow \tau = \frac{4 + 3 + 5}{2} \text{ δηλ } \tau = 6$$

$$\text{Άρα από (1)} \Rightarrow 6 = 6 \cdot \rho \Rightarrow \rho = 1$$

- γ. Ο εγγεγραμμένος κύκλος (K, R) έχει ακτίνα ίση με το απόστημα του τετραγώνου $EZH\Theta$ δηλ $R = \alpha_4$.
 Ξέρουμε όμως ότι το απόστημα ενός τετραγώνου είναι ίσο με το μισό της πλευράς του .

$$(\text{δηλ } \alpha_4 = \frac{\lambda_4}{2}).$$

$$\text{Επομένως } \alpha_4 = \frac{5}{2} \text{ οπότε } R = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ο κύκλος } (K, R) \text{ έχει εμβαδό } E_1 = \pi \cdot R^2 = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$$

$$\text{Ο κύκλος } (\Lambda, \rho) \text{ έχει εμβαδό } E_2 = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$\text{Ο λόγος των εμβαδών είναι: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{\pi} = \frac{25}{4}$$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Θόδωρος Γκιούλος - Μαθηματικός
Θανάσης Ρούτσης - Μαθηματικός
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ "ΕΠΙΛΟΓΗ"
<http://www.epil.gr>