

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 67.

B. $\alpha \rightarrow$ Σωστό, $\beta \rightarrow$ Λάθος, $\gamma \rightarrow$ Λάθος, $\delta \rightarrow$ Σωστό, $\varepsilon \rightarrow$ Λάθος

Γ. α. Σχολικό σελ. 94.

β. Σχολικό σελ. 101.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\alpha_1 = \sin 2\alpha$

$\alpha_2 = \sin^2 \alpha$

$\alpha^3 = 1$

Για να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π θα πρέπει $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 2\alpha \Leftrightarrow$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$ που ισχύει.

β. Η διαφορά είναι $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = 1 - \sin^2 \alpha = \eta \mu^2 \alpha$

γ. Είναι: $S_v = \frac{V}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

Για $v = 5$:

$$S_5 = \frac{5}{2} [2\sin 2\alpha + (5-1)\eta \mu^2 \alpha] = \frac{5}{2} (2\sin 2\alpha + 4\eta \mu^2 \alpha) = \frac{5}{2} [2(1-2\eta \mu^2 \alpha) + 4\eta \mu^2 \alpha]$$

$$= \frac{5}{2} (2 - 4\eta \mu^2 \alpha + 4\eta \mu^2 \alpha) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι: $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \kappa \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa + \lambda) \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$$= \kappa \left(-\frac{1}{8}\right) - (\kappa + \lambda) \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} + 1 = -\frac{\kappa}{8} - \frac{\kappa}{4} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} + 1$$

$$= \frac{-\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda + 8}{8} = \frac{-3\kappa - 6\lambda + 8}{8}$$

Επίσης: $P(-1) = \kappa(-1)^3 - (\kappa + \lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1$
 $= -\kappa - \kappa - \lambda - \lambda + 1 = -2\kappa - 2\lambda + 1$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3\kappa - 3\lambda + 8}{8} = 7 \\ \text{και } P(-1) &= 23 \Rightarrow -2\kappa - 2\lambda + 1 = 23 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -3\kappa - 6\lambda &= 48 \\ -2\kappa - 2\lambda &= 22 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -3\kappa - 6\lambda &= 48 \\ 6\kappa + 6\lambda &= -66 \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 3\kappa = -18 \Rightarrow \kappa = -6$$

Οπότε με αντικατάσταση σε μια από τις εξισώσεις του συστήματος βρίσκουμε:
 $\lambda = -5$

β. Για $\kappa = -6$, $\lambda = -5$ το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$

Κάνουμε την διαίρεση $P(x):(2x+1)$

$-6x^3$	$+11x^2$	$-5x$	$+1$	$2x+1$
$6x^3$	$+3x^2$			$-3x^2+7x-6$
	$14x^2$	$-5x$	$+1$	
	$-14x^2$	$-7x$		
		$12x$	$+1$	
		$-12x$	$+6$	

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$$P(x) = (2x+1)(-3x^2+7x-6)+7$$

γ. $P(x) > 7 \Rightarrow$ (Από β ερώτημα)

$$(2x+1)(-3x^2+7x-6)+7 > 7$$

$$(2x+1)(-3x^2+7x-6) > 0 \quad (1)$$

Επειδή το τριώνυμο $-3x^2+7x-6$ έχει $\Delta = -22$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε για να ισχύει η (1) θα πρέπει:

$$2x+1 < 0 \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0$

όμως $e^x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα } \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 \Rightarrow e^{2x} > e^0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = (0, +\infty)$

$$\beta. \quad f(x) = 2 \ln 2 \Rightarrow \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} = \ln 2^2 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} = 4 \Rightarrow$$

$$e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x - 21 = 0$$

Θέτουμε $e^x = y$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$y^2 - 4y - 21 = 0 \quad \text{με } \Delta = 16 + 84 = 100 \quad \text{και ρίζες } y = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$$

Αν $y = 7$ τότε $e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7$

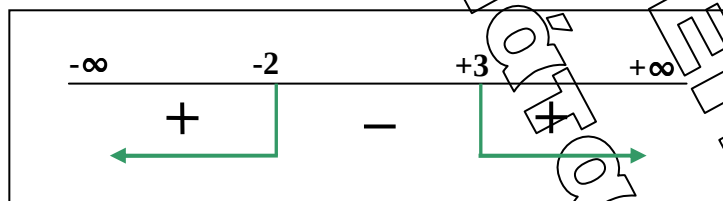
Αν $y = -3$ τότε $e^x = -3$ ΑΔΥΝΑΤΗ

$$\gamma. \quad \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0 \Rightarrow \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > \ln 1 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 1 \Rightarrow (e^{2x} - 1) > e^x + 5 \Rightarrow e^{2x} - e^x - 6 > 0$$

Θέτουμε $e^x = y$, οπότε έχουμε την ανίσωση $y^2 - y - 6 > 0$

$$\text{με } \Delta = 1 + 24 = 25 \quad \text{και ρίζες } y = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι



Άρα $y < -2 \Rightarrow e^x < -2$ ΑΔΥΝΑΤΗ

ή $y > 3 \Rightarrow e^x > 3 \Rightarrow x > \ln 3$

Επιμέλεια απαντήσεων:
 Θεόδωρος Γκιούλος - Μαθηματικός
 Θανάσης Ρούτσης - Μαθηματικός
 ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ "ΕΠΙΛΟΓΗ"
<http://www.epil.gr>