

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Σελίδα 98 σχολικού βιβλίου παράγραφος 2.3

A.2. $\alpha \rightarrow \text{Σωστό}, \beta \rightarrow \text{Λάθος}, \gamma \rightarrow \text{Λάθος}, \delta \rightarrow \text{Σωστό}, \varepsilon \rightarrow \text{Σωστό}$

B.1. Έχουμε: $|z_1| = \sqrt{9+16} = 5$

$$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$$

$1 \rightarrow \zeta, 2 \rightarrow \gamma, 3 \rightarrow \alpha, 4 \rightarrow \delta, 5 \rightarrow \beta$

B.2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0 \text{ αφού } |z| = 1$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f συνεχής στο $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ ως πολυωνυμική και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα.

Η f είναι συνεχής και στο 3 αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-e^{x-3}) = -e^0 = -1$$

$$\text{Άρα: } 9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$$

β. Για $x > 3$, $f'(x) = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1-e^{x-3})}{(x-3)^2}$

$$f(4) = \frac{1-e}{1} = 1-e, \quad f'(4) = \frac{-e-1+e}{1^2} = -1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι:

$$\varepsilon: y - (1 - e) = - (x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 5 - e$$

γ. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

Δηλαδή $f(x) \leq 0$, $x \in [1, 2]$. Επίσης f συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\varepsilon(\Omega) = \int_1^2 (-f(x)) dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{27}(8-1) = \frac{7}{27} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ (1)

$$\beta^2 < 3\gamma$$

Τα 2 μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε από την (1) έχουμε:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \quad \text{ή}$$

$$(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2),$$

$$\text{Είναι: } 3x^2 - 4x + 6 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αφού η διακρίνουσα του Δ είναι: $\Delta = -56 < 0$ και

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς $f(x)$ είναι: $\Delta_1 = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

α. Από τη (2) έχουμε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β. Από τη (2) έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, άρα η $f(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, 1)$ (3)

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma) = -1$$

Για το τριώνυμο $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ ως προς $f(x)$ έχουμε διακρίνουσα $\beta^2 - 4\gamma < 0$

(διότι $0 \leq \beta^2 < 3\gamma$ και άρα $\beta^2 - 4\gamma < -\gamma < 0$).

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f^2(x) + \beta f(x) + \gamma > 0$$

Έτσι:

$$f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$$

Οπότε: $f(0) < 0$. Επίσης από (1) για $x = 1$ έχουμε:

$$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = 4$$

και επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ προκύπτει $f(1) > 0$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0)f(1) < 0$

Από το Θ. Bolzano συμπεραίνουμε ότι η $f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

Από (3) και (4) προκύπτει πως η $f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $x \cdot t = u \Leftrightarrow t = \frac{u}{x}$ με $x \neq 0$

Είναι $t = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $t = 1 \rightarrow u = x$

Έχουμε:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^{\frac{u}{x}} f^2(u) \frac{du}{x} = 1 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x u f^2(u) du = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du, \text{ για } x \neq 0$$

Λόγω συνέχειας της f έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du \right) = 1$$

$$\text{Άρα: } f(x) = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επομένως: } f'(x) = -2x \cdot f^2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\beta. \text{ Είναι: } g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2 \right)' = \frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } g(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma. \text{ Είναι: } f(0) = 1, \text{ οπότε } g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$$

$$\text{Επομένως } g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ άρα}$$

$$\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = 1 + x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\delta. \text{ Έχουμε: } x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x = \frac{x}{1+x^2} \cdot \eta\mu 2x \text{ με } x > 0$$

$$\text{Ισχύει ότι: } -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = 0$$

$$\text{Οπότε απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \cdot \eta\mu 2x) = 0$$