

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1.

α. Σχολ. βιβλίο σελ. 147 θεώρημα 2 (iii)

Επειδή $\alpha \mid \beta$ ακέραιος κ , τέτοιος ώστε $\beta = \kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta = \lambda\kappa\alpha$
 άρα: $\alpha \mid \lambda\beta$

β. Σχολ. βιβλίο σελ. 147 θεώρημα 2 (iv)

Επειδή $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\alpha$.
 Οπότε: $\beta + \gamma = \kappa\alpha + \lambda\alpha$ ή $(\beta + \gamma) = (\kappa + \lambda)\alpha$
 Άρα: $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

A.2. Σωστή απάντηση η β.

B.1. Σωστή απάντηση η α.

Είναι

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid (\alpha + 5) \\ 7 \mid (40 - \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid (\alpha + 5 - (40 - \beta)) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \mid \alpha + \beta - 35 \\ \text{Ομως: } 7 \mid 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid \alpha + \beta$$

B.2. $(72, 112) = (8 \cdot 9, 8 \cdot 14) = 8(9, 14) = 8 \cdot 1 = 8$

B.3. $112 = 72 \cdot 1 + 40 \Leftrightarrow 40 = 112 - 72 \cdot 1$

$$72 = 40 \cdot 1 + 32 \Leftrightarrow 32 = 72 - 40 \cdot 1$$

$$40 = 1 \cdot 32 + 8 \Leftrightarrow 8 = 40 - 1 \cdot 32$$

$$32 = 8 \cdot 4 + 0$$

$$\text{Είναι: } 8 = 40 - 1 \cdot 32 = 40 - 1(72 - 40 \cdot 1) = 2 \cdot 40 - 72 = 2(112 - 72) - 72 = -3 \cdot 72 + 2 \cdot 112.$$

$$\text{Άρα: } 8 = -3 \cdot 72 + 2 \cdot 112$$

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}, \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

$$\text{Είναι: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

β. $|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 52$

Άρα: $|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 + 4 \cdot 4 - 4 = 17 - 4 = 13$

Άρα: $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

γ.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = \\ &= 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2 \cdot 1 - 1 - 6 \cdot 4 = 1 - 24 = -23 \end{aligned}$$

δ. $\cos(\hat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 6x + 9 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \\ (x+3)^2 - y^2 &= 0 \Leftrightarrow (x+3+y)(x+3-y) = 0 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow (\varepsilon_1): y &= -x-3 \quad \text{ή} \quad (\varepsilon_2): y = x+3 \end{aligned}$$

β.

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon_1} &= -1, \quad \lambda_{\varepsilon_2} = 1 \\ \text{Οπότε: } \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} &= -1 \\ \text{Άρα: } (\varepsilon_1) &\perp (\varepsilon_2) \end{aligned}$$

γ.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_1) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda) \parallel (\varepsilon_2) \end{array} \right) &\text{ή} \left(\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_2) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda) \parallel (\varepsilon_1) \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{\kappa}{3} = -1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = 1 \end{array} \right) &\text{ή} \left(\begin{array}{l} \frac{\kappa}{3} = 1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa = -3 \\ \lambda = -4 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 4 \end{pmatrix}$$

(απορρ.) (δεκτές)

Άρα: $M(3, 4)$

- δ. Η εξίσωση της παραβολής είναι: $\psi^2 = 2\rho x$
 Επειδή το σημείο $M(3, 4)$ ανήκει σ' αυτή, έχουμε:

$$16 = 2 \cdot \rho \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{16}{6} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

$$\text{Άρα: } \psi^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} x \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{16}{3} x$$

ΘΕΜΑ 4ο

- A. $x^2 + \psi^2 + 6\mu x + 8\lambda\psi = 0$ ή
 $(x^2 + 6\mu x) + (\psi^2 + 8\lambda\psi) = 0$ ή
 $(x^2 + 2 \cdot 3\mu \cdot x + 9\mu^2 - 9\mu^2) + (\psi^2 + 2 \cdot 4\lambda \cdot \psi + 16\lambda^2 - 16\lambda^2) = 0$ ή
 $(x + 3\mu)^2 - 9\mu^2 + (\psi + 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0$ ή
 $(x + 3\mu)^2 + (\psi + 4\lambda)^2 = 9\mu^2 + 16\lambda^2$
 Επειδή $9\mu^2 + 16\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^*$ προκύπτει ότι είναι εξίσωση κύκλου με
 κέντρο $K(-3\mu, -4\lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}$
 Προφανώς οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν τη δοσμένη εξίσωση.

B.

- α. Έχουμε $K(-3\mu, -4\lambda)$ το κέντρο του κύκλου.
 Θέτουμε:
 $-3\mu = x \Leftrightarrow \mu = -\left(\frac{x}{3}\right)$ και $-4\lambda = \psi \Leftrightarrow \lambda = -\left(\frac{\psi}{4}\right)$
 αντικαθιστούμε στην $3\mu + 2\lambda = 0$. Έχουμε:
 $3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{\psi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -x - \frac{\psi}{2} = 0 \Leftrightarrow \psi = -2x$
 Άρα έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $\psi = -2x$

β. 1^η Λύση:

Επειδή $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, προκύπτει $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (1)
 Επειδή τα O, A και B είναι σημεία του κύκλου, προκύπτει λόγω της (1) ότι η AB
 είναι διάμετρος του κύκλου.
 Επομένως η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + \psi + 2 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του
 $K(-3\mu, -4\lambda)$.
 Οπότε $-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$ (2)
 Όμως έχουμε $3\mu + 2\lambda = 0$ (3)

Από το σύστημα των εξισώσεων (2 και (3), βρίσκουμε:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

2^η Λύση:

Έστω ότι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των Α, Β.
Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος.

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y &= 0 \\ x + y + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (-x-2)^2 + 6\mu x + 8\lambda(-x-2) &= 0 \\ y &= -x-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 + (4+6\mu-8\lambda)x + (4-16)\lambda &= 0 \\ y &= -x-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (2+3\mu-8\lambda)x + (2-8\lambda) &= 0 \quad (1) \\ y &= -x-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Επειδή $3\mu + 2\lambda = 0$ ή (1) γράφεται: $x^2 + 2(1-3\lambda)x + (2-8\lambda) = 0$

Έτσι είναι $x_1 + x_2 = 2(3\lambda-1)$ και $x_1 x_2 = 2-8\lambda$. (2)

Η σχέση τώρα $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ γράφεται

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$x_1 x_2 + (-x_1-2)(-x_2-2) = 0 \quad \text{ή}$$

$$x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 2 = 0$$

Λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$2 - 8\lambda + 2(3\lambda-1) + 2 = 0$$

$$\text{άρα } \lambda = 1, \text{ οπότε και } \mu = -\frac{2}{3}$$

γ. 1^η Λύση:

$$\text{Για τις τιμές } \lambda = 1, \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Οπότε: } (AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$E = \frac{1}{2}(AB) \cdot d(O, AB) = \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$\frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μονάδες}$$

2^η Λύση:

Για τις τιμές $\lambda=1$, και $\mu = -\frac{2}{3}$

Είναι: $x_1+x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = -6$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$\begin{aligned} (OAB) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{1}{2} |x_1(-x_1-2) - x_2(-x_1-2)| = \\ &= \frac{1}{2} |-x_1 x_2 - 2x_1 + x_1 x_2 + 2x_2| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1 x_2} = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ τ. μονάδες.} \end{aligned}$$

3^η Λύση:

Για τις τιμές $\lambda=1$, και $\mu = -\frac{2}{3}$ η εξίσωση του κύκλου γίνεται :

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$$

Οι συντεταγμένες των Α, Β προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Προκύπτει:

$$(x_1, y_1) = (2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$$

$$(x_2, y_2) = (2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10})$$

Το εμβαδόν τώρα του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots = 2\sqrt{10} \text{ τ. μονάδες}$$