

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Θεώρημα ακέραιων ριζών, σελ 74 σχολικού βιβλίου.

A.2. Η σωστή απάντηση είναι η δ.

B.1. $\alpha \rightarrow \Lambda \quad \beta \rightarrow \Delta \quad \gamma \rightarrow \Sigma$

B.2. Η σωστή απάντηση είναι η α, γιατί $P(-1) = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι: $5\sigmaυν^2\alpha - 14\sigmaυν\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow$
 $5(2\sigmaυν^2\alpha - 1) - 14\sigmaυν\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow$
 $10\sigmaυν^2\alpha - 5 - 14\sigmaυν\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow$
 $5\sigmaυν^2\alpha - 7\sigmaυν\alpha - 6 = 0$

Είναι: $\Delta = 49 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169$

άρα: $\sigmaυν\alpha = \frac{7 \pm 13}{10} \Rightarrow \frac{20}{10} = 2, \text{ απορ.}$
 $\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}, \text{ δεκτή}$

β. Είναι:

$$\eta\mu^2\alpha + \sigmaυν^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \sigmaυν^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Αφού $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ και επειδή στο 3^ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu\alpha < 0$, έχουμε

$$\eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Είναι: } \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigmaυν\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\sigmaυν 2\alpha = 2\sigmaυν^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{24}{25}} = -\frac{24}{25}$$

ΘΕΜΑ 3ο

- α. Είναι $\alpha_3 = \log 125$, $\omega = \log 5$,
 οπότε: $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow \log 125 = \alpha_1 + 2\log 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 125 - 2\log 5 \Leftrightarrow$
 $\alpha_1 = \log 125 - \log 5^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 125 - \log 25 \Leftrightarrow$
 $\alpha_1 = \log \frac{125}{25} \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 5$

Άρα $\alpha_1 = \omega$

- β. Είναι: $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29} = S_{29} - S_{20}$

Έχουμε:

$$S_{29} = \frac{2\alpha_1 + 28\omega}{2} \cdot 29 = (\alpha_1 + 14\omega) \cdot 29 = (\omega + 14\omega) \cdot 29 = 15\omega \cdot 29 = 435\omega = 435\log 5$$

και

$$S_{20} = \frac{2\alpha_1 + 19\omega}{2} \cdot 20 = (\alpha_1 + 19\omega) \cdot 10 = (\omega + 19\omega) \cdot 10 = 20\omega \cdot 10 = 210\omega = 210\log 5$$

Άρα είναι: $A = S_{29} - S_{20} = 435\log 5 - 210\log 5 = 225\log 5$

- γ. Είναι: $\lambda = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (και $\beta_1 = \alpha_1 \neq 0$), άρα: $\lambda = \frac{\alpha_1 + \omega}{\omega} = \frac{2\omega}{\omega} = 2$.

Το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$ είναι άθροισμα 1001* διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο β_1 και λόγο

$$\lambda' = \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\beta_1 \cdot \lambda^2}{\beta_1} = \lambda^2 = 4.$$

Οπότε είναι:

$$B = S_{1001} = \beta_1 \cdot \frac{(\lambda')^{1001} - 1}{\lambda' - 1} = \alpha_1 \cdot \frac{4^{1001} - 1}{4 - 1} = \log 5 \cdot \frac{4^{1001} - 1}{3}$$

* Για το πλήθος των όρων του αθροίσματος B, επειδή οι δείκτες των όρων είναι περιττοί αριθμοί θα έχουμε

$$\gamma_v = \gamma_1 + (v-1) \cdot 2 \Leftrightarrow 2001 = 1 + 2v - 2 \Leftrightarrow 2002 = 2v \Leftrightarrow v = 1001$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έχουμε από υπόθεση $Q(0)=3, Q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{Q(0)}{2}=\frac{3}{2}$, οπότε, από

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta \Leftrightarrow Q(t) = e^{\alpha t + \beta}$$

Για $t=0$ είναι $Q(0)=e^{\beta}$, άρα είναι $3=e^{\beta}$ επομένως

$$Q(t) = e^{\beta} \cdot e^{\alpha t} \Leftrightarrow Q(t) = 3e^{\alpha t}$$

$$\text{Για } t = \frac{1}{2} \text{ είναι } Q\left(\frac{1}{2}\right) = 3e^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{άρα: } \frac{3}{2} = 3e^{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha} = 4^{-1},$$

$$\text{Επομένως: } Q(t) = 3e^{\alpha t} \Leftrightarrow Q(t) = 3(4^{-1})^t \Leftrightarrow Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$$

β. Θέλουμε $Q(t) = \frac{1}{16} Q_0 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = \frac{1}{16} \cdot 3 \Leftrightarrow 4^{-t} = 4^{-2} \Leftrightarrow t = 2$

άρα μετά από δύο χρόνια η τιμή του προϊόντος θα είναι το $\frac{1}{16}$ της αρχικής τιμής.

γ. Θέλουμε να ισχύει

$$Q(t) \leq \frac{1}{9} Q_0 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{9} \cdot 3 \Leftrightarrow 4^{-t} \leq 9^{-1} \Leftrightarrow \log 4^{-t} \leq \log 9^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -t \log 4 \leq -\log 9 \Leftrightarrow t \cdot \log 2^2 \geq \log 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t \log 2 \geq 2 \log 3 \quad \begin{matrix} \log > 0, \text{ γιατί } 2 > 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\text{άρα ο ελάχιστος χρόνος είναι: } t \geq \frac{\log 3}{\log 2}$$