ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260-261.

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246.

Α.3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280.

Α.4.

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Σωστό
v. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ και}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-(1+3)}{2}=-1 \text{ οπότε}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}=\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{33}=(-1)^{33}=-1$$

Επίσης $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$ οπότε $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50}=i^{50}=\left(i^4\right)^{12}\cdot i^2=-1$

ΕΠΙΛΟΓΑ ΔΙΑΛΜΑΤΑ

Συνεπώς $\left|z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}\right|^2+\left|z-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}\right|^2=4\Leftrightarrow |z-1|^2+|z+1|^2=4\Leftrightarrow$

$(z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4\Leftrightarrow$

$2z\bar{z}=2\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1.$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος (c) με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ίση με 1, δηλαδή (c): $x^2+y^2=1$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}=\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=\left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(\frac{1^2-i^2\sqrt{3}^2}{4}\right)^{33}=\left(-\frac{1+3}{4}\right)^{33}=-1$$

Επίσης

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50}=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{50}=i^{50}=\left(i^4\right)^{12}\cdot i^2=-1$$

Συνεπώς

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4\Leftrightarrow(z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4\Leftrightarrow|z|=1$$

Β.2. Ισχύει ότι:

$2w\cdot z-2z-w+4=0\Leftrightarrow 2w\cdot z-2z=w-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z(w-1)=w-4\Rightarrow 2|z||w-1|=|w-4|\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot 1\cdot|w-1|=|w-4|\Leftrightarrow 4|w-1|^2=|w-4|^2\Leftrightarrow$

$4(w-1)(\bar{w}-1)=(w-4)(\bar{w}-4)\Leftrightarrow$

$4(w\bar{w}-w-\bar{w}+1)=w\bar{w}-4w-4\bar{w}+16\Leftrightarrow$

$4w\overline{w} - \cancel{4w} - \cancel{4\overline{w}} + 4 = w\overline{w} - \cancel{4w} - \cancel{4\overline{w}} + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3w\overline{w} = 12 \Leftrightarrow |w|^2 = 4 \Leftrightarrow |w| = 2.$

Β.3. **i.** Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον κύκλο (C) ισχύει ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ οπότε $|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 1$

συνεπώς. $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}$, $\overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2}$ και $\overline{z_3} = \dfrac{1}{z_3}$. Έχουμε ότι

$$\overline{t} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{1 + z_1z_2z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} + \overline{z_2}\cdot\overline{z_3} + \overline{z_1}\cdot\overline{z_3}}{1 + \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}} =$$

$$\frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1\cdot z_2} + \frac{1}{z_2\cdot z_3} + \frac{1}{z_1\cdot z_3}}{1 + \frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_3}} = \frac{\frac{z_2\cdot z_3 + z_1\cdot z_3 + z_1\cdot z_2 + z_3 + z_1 + z_2}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}}{\frac{z_1\cdot z_2\cdot z_3 + 1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}} = t$$

άρα $t \in \mathbb{R}$.

ii. Ισχύει $\left|\dfrac{z_1 - w}{w - z_2}\right| = \dfrac{|z_1 - w|}{|w - z_2|} \le \dfrac{|z_1| + |w|}{|w - z_2|} \le \dfrac{|z_1| + |w|}{\big||w| - |z_2|\big|} = \dfrac{1+2}{|2-1|} = 3$ και

$\left|\dfrac{z_1 - w}{w - z_2}\right| = \dfrac{|z_1 - w|}{|w - z_2|} \ge \dfrac{\big||z_1| - |w|\big|}{|w - z_2|} \ge \dfrac{\big||z_1| - |w|\big|}{|w| + |z_2|} = \dfrac{|1-2|}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ άρα $\dfrac{1}{3} \le \left|\dfrac{z_1 - w}{w - z_2}\right| \le 3$

2ος Τρόπος

Ισχύει $\big||z_1| - |w|\big| \le |z_1 - w| \le |z_1| + |w| \Leftrightarrow 1 \le |z_1 - w| \le 3$ και

$\big||w| - |z_2|\big| \le |w - z_2| \le |w| + |z_2| \Leftrightarrow 1 \le |w - z_2| \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{|w - z_2|} \le 1$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\frac{1}{3} \le \left|\frac{z_1 - w}{w - z_2}\right| \le 3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) - 3 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x+1} - f(x) + \ln(x+1) = -3 \Leftrightarrow$$

$$\big[f(x) - \ln(x+1)\big]' - \big[f(x) - \ln(x+1)\big] = -3 \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)-\ln(x+1)$ (2). Τότε η (1) γίνεται:

$$F'(x)-F(x)=-3 \overset{e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} F'(x)\cdot e^{-x}-F(x)\cdot e^{-x}=-3e^{-x} \Leftrightarrow \left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=\left(3e^{-x}\right)'.$$

Τότε $F(x)\cdot e^{-x}=3e^{-x}+c \Leftrightarrow F(x)=3+ce^{x} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x)-\ln(x+1)=3+ce^{x}$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)-\ln(0+1)=3+ce^{0} \Leftrightarrow 2=3+c \Leftrightarrow c=-1$.

Άρα $f(x)=3-e^{x}+\ln(x+1)$.

2ος Τρόπος

Για κάθε $x>-1$ έχουμε

$$f'(x)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot\frac{1}{x+1}-e^{-x}\cdot\ln(x+1)-3e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot\ln(x+1)+3e^{-x}+c \Leftrightarrow f(x)=\ln(x+1)+3+c\cdot e^{-x}$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\ln(0+1)+c\cdot e^{0} \Leftrightarrow 2=3+c \Leftrightarrow c=-1$.

Άρα $f(x)=3-e^{x}+\ln(x+1)$.

Γ.2. **α.** Έχουμε $e^{x}-\ln(x+1)=3 \Leftrightarrow 3-e^{x}+\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι:

$$f'(x)=-e^{x}+\frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x)=-e^{x}-\frac{1}{(x+1)^{2}}<0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f'(0)=-e^{0}+\frac{1}{0+1}=0$.

Τότε

- Για $x<0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$
- Για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0$

x	-1	0	+∞
f΄(x)	+	0	–
f(x)	↗		↘

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Σύνολο τιμών

- Αν $x \in A_1 = (-1,0]$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ισχύει $f(A_1) = f((-1,0]) = \left(\lim\limits_{x\to -1^+} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 2]$ γιατί $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(3 - e^x + \ln(x+1)\right) = -\infty$ και $f(0) = 2$
- Αν $x \in A_2 = [0,+\infty)$ τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής ισχύει $f(A_2) = f([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 2]$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3 - e^x + \ln(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(3e^{-x} - 1 + \frac{\ln(x+1)}{e^x}\right) = -\infty$$

όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH } x\to+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{e^x} = 0\cdot 0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Άρα υπάρχουν $\rho_1 \in (-1,0)$ και $\rho_2 \in (0,+\infty)$ μοναδικά (λόγω μονοτονίας) τέτοια ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $e^x - \ln(x+1) = 3$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

β. Είναι

$3 + \ln(x+1) = e^x + \alpha x^3 \Leftrightarrow 3 - e^x + \ln(x+1) - \alpha x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) - \alpha x^3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = f(x) - \alpha x^3$

Για την συνάρτηση k ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο διάσημα $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

  $k(\rho_1) = f(\rho_1) - \alpha\rho_1^3 = -\alpha\rho_1^3$

  $k(\rho_2) = f(\rho_2) - \alpha\rho_2^3 = -\alpha\rho_2^3$

  Τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) = \alpha^2\rho_1^3\rho_2^3$ (1)

- Αν $\alpha = 0$ τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 \text{ ρίζα} \\ k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_2 \text{ ρίζα} \end{cases}$
- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) < 0$, από τη σχέση (1) γιατί $\rho_1\rho_2 < 0$.

  Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $k(\rho) = 0$

  Τελικά υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

γ. Παρατηρούμε ότι:

$\ln(\ln x+1)+e^{x-1}>\ln x+x \Leftrightarrow \ln(\ln x+1)-x+3>\ln(x-1+1)-e^{x-1}+3 \Leftrightarrow$

$f(\ln x)>f(x-1) \overset{f\ \text{γνησ. φθίν.}}{\Leftrightarrow} \ln x<x-1$ (από το ερώτημα (α))

που ισχύει για κάθε $x>1$, λόγω εφαρμογής 2 του σχολικού σελίδα 266.

Γ.3. Είναι

$$G(x)=\frac{2-f(x)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}=\frac{2-\left(3-e^x+\ln(x+1)\right)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}=\frac{e^x-1}{x\cdot e^x+1}$$

Τότε

$$G'(x)=\frac{\left(e^x-1\right)'\left(x\cdot e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(x\cdot e^x+1\right)'}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x\cdot e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+x\cdot e^x\right)}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}=$$

$$G'(x)=\frac{e^x\left[\left(x\cdot e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)(1+x)\right]}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x\cdot e^x+1-e^x-x\cdot e^x+1+x\right)}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-e^x+2\right)}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}$$

Είναι $\dfrac{e^x}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-e^x+2, x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$G'(x)=\frac{e^x}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2}\cdot g(x)$$

Είναι

- $g'(x)=1-e^x$ και αν $g'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- Αν $g'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $g'(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x>-1$ έχουμε:

x	-1		0		$+\infty$
g΄(x)		+	0	–	
g(x)		↗		↘	

Η g παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $g(0)=1$.

Σύνολο τιμών της g

- Αν $x \in A_1 = (-1,0]$ τότε επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $g(A_1) = g((-1,0]) = \left(\lim\limits_{x\to -1} g(x), g(0)\right] = \left(1-\frac{1}{e}, 1\right]$ γιατί

  $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x - e^x + 2\right) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

  Τότε δεν υπάρχει λύση γιατί $g(x) \neq 0 \Rightarrow G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0]$.

- Αν $x \in A_2 = [0,+\infty)$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $g(A_2) = g([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} g(x), g(0)\right] = (-\infty, 1]$ γιατί

  $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - e^x + 1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ όπου

  $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}_{\text{DLH}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

  Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \in g(A_2)$

  Για $x < x_0 \overset{\text{g γνησ.φθίν.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow G'(x) > 0$

  Για $x > x_0 \overset{\text{g γνησ.φθίν.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow G'(x) < 0$

  Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, x_0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$ και $G(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο (μοναδικό).

  Από την σχέση $g(x_0) = 0$ έχουμε $x_0 - e^{x_0} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = x_0 + 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. **α.** Έχουμε

$G'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και η G' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων της G και του γινομένου $e^x \cdot f(x)$ (εκθετική και από υπόθεση) με παράγωγο

$G''(x) = G'(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) =$

$= e^x \int_0^x f(t)dt + 2e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x\left(\int_0^x f(t)dt + 2f(x) + f'(x)\right) > 0$ διότι

$H'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=e^{2x}\left(2f(x)+f'(x)\right)$

Αλλά η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα οπότε ισχύει $H'(x)\geq 0$. (Σχόλιο σχ. βιβλίου 254).

Άρα $e^{2x}\left(2f(x)+f'(x)\right)\geq 0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} 2f(x)+f'(x)\geq 0$ (1)

Επίσης για $t>0 \overset{\text{Η γν. αύξ}}{\Rightarrow} H(t)>H(0)\Rightarrow H(t)>e^0 f(0)\Rightarrow H(t)>1>0\Rightarrow$

$e^{2t}\cdot f(t)>0\Rightarrow f(t)>0\Rightarrow \int_0^x f(t)dt>0$ (2).

Από (1) και (2) με πρόσθεση έχουμε $\int_0^x f(t)dt+2f(x)+f'(x)>0$

Άρα η συνάρτηση G είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β.

- η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,x]$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,x)$ με $G'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot\int_0^x f(t)dt$

  Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,x)$ ώστε $G'(\xi)=\dfrac{G(x)-G(0)}{x}=\dfrac{G(x)}{x}$
- Αφού η G είναι κυρτή η G' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για:

$0<\xi<x \Leftrightarrow G'(0)<G'(\xi)<G'(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(0)+e^0 f(0)<\dfrac{G(x)}{x}<G'(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{G(x)}{x}<G'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<G(x)<x\cdot G'(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

2ος Τρόπος

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi(x)=G(x)-x$ με $\varphi'(x)=G'(x)-1$ και την $h(x)=x\cdot G'(x)-G(x)$ με $h'(x)=\cancel{G'(x)}+x\cdot G''(x)-\cancel{G'(x)}=x\cdot G''(x)$.

- Για $x>0 \overset{G'\text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} G'(x)>G'(0)\Leftrightarrow G'(x)>1\Leftrightarrow G'(x)-1>0\Leftrightarrow \varphi'(x)>0$

  Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

  Για $x>0\Leftrightarrow \varphi(x)>\varphi(0)\Leftrightarrow G(x)-x>0\Leftrightarrow G(x)>x$ (3)
- Ισχύει $h'(x)=x\cdot G''(x)>0$

  Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

Για $x>0 \Leftrightarrow h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow x\cdot G'(x)>G(x)$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει $x<G(x)<x\cdot G'(x)$

γ. Επιπλέον ισχύει:

$G(x)<x\cdot G'(x) \Rightarrow x\cdot G'(x)-G(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $h(x)=x\cdot G'(x)-G(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση διότι

- Η συνάρτηση $H_1(x)=x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική
- Η συνάρτηση G' αφού ορίζεται η G'', όπως και η G που αναφέρεται παραπάνω είναι συνεχείς. Επομένως η $h(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $x_0\in(0,1)$.

Έχουμε:

$h(x)>0 \Rightarrow \int_{x_0}^{1} h(x)\,dx>0 \Leftrightarrow$ (γιατί η h δεν είναι πάντα μηδέν).

$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1}\left(x\cdot G'(x)-G(x)\right)dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1} x\cdot G'(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x\cdot G(x)\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}(x)'\cdot G(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(1)-x_0\cdot G(x_0)-\int_{x_0}^{1} G(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(1)-x_0\cdot G(x_0)>2\int_{x_0}^{1} G(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1} G(x)dx<\dfrac{G(1)-x_0\cdot G(x_0)}{2}$.

Δ.2. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt-x^2}{x-\eta\mu x}=\frac{0}{0}$$ γιατί

Η συνάρτηση $f_1(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη οπότε η $f_2(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση $f_3(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

ΕΚΔΟΣΗ ΑΥΤΟΜΑΤΗ

Η συνάρτηση $f_4(x)=\int_0^x x\cdot f(t)dt = x\cdot\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_5(x)=\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_6(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική.

Η συνάρτηση $f_7(x)=x-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα οι συναρτήσεις f_5 και f_7 είναι παραγωγίσιμες και έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$$

Επομένως έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες κοντά στο μηδέν. Για την άρση της απροσδιοριστίας το όριο κοντά στο μηδέν γράφεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^x f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)}{x-\eta\mu x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\eta\mu x}\cdot\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{x^2}=6\cdot\frac{2015}{6}=2015$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{(x-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2\right)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\eta\mu x}=6$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}\cdot f'(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2015}{3}=\frac{2015}{6}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ

2ος Τρόπος

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^x f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cdot\int_0^x f(t)dt\right)' - 2x}{(x-\eta\mu x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)+\int_0^x f(t)dt - 2x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot f(x)-x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot f(x)-x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{2015}{3}\cdot 2 + \frac{2015}{3} = 2015$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \dfrac{2015}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \dfrac{2}{1} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{x}{\eta\mu x} = f'(0)\cdot 1 = \dfrac{2015}{3}$

Δ.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_x^{x+1} G(t)dt$ η οποία ορίζεται στο $[0,+\infty)$ αφού η G είναι συνεχής σε αυτό και οι συναρτήσεις x, x+1 έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{R} \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\geq 0\,.$$

Άρα το $D_F=[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με παράγωγό που ορίζεται ως εξής:

Έστω $\alpha\in[0,+\infty)$. Τότε

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x+1}G(t)dt-\int_{\alpha}^{x}G(t)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x)=G(x+1)(x+1)'-G(x)=G(x+1)-G(x)$$

- Η F συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x,x+1]\subseteq[0,+\infty)$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την F στο διάστημα $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}=F(x+1)-F(x)=\int_{x+1}^{x+2}G(t)dt-\int_{x}^{x+1}G(t)dt$$

- *Μονοτονία της* F'

  Έχουμε: $F''(x)=G'(x+1)(x+1)'-G'(x)=G'(x+1)-G'(x)>0$ για κάθε στο $[0,+\infty)$ αφού στο **Δ1** δείξαμε ότι η G είναι κυρτή άρα η G' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

  $$x<x+1\overset{G'\text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow}G'(x)<G'(x+1)\Rightarrow G'(x+1)-G'(x)>0\Leftrightarrow F''(x)>0$$

  οπότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.

- *Διάταξη*

  Ισχύει ότι:

  $$\xi\in(x,x+1)\Leftrightarrow x<\xi<x+1\Rightarrow\xi<x+1\overset{F'\text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow}F'(\xi)<F'(x+1)\Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow\int_{x+1}^{x+2}G(t)dt-\int_{x}^{x+1}G(t)dt<G(x+2)-G(x+1)\Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow G(x+1)+\int_{x+1}^{x+2}G(t)dt<G(x+2)+\int_{x}^{x+1}G(t)dt$$

2ος Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $\omega(x)=G(x+1)-\int_{x}^{x+1}G(t)dt$, $x>0$.

Έχουμε για $\alpha\in(0,+\infty)$

$$\omega'(x)=G'(x+1)-\left(\int_{x}^{x+1}G(t)dt\right)'=G'(x+1)-\left(\int_{\alpha}^{x+1}G(t)dt-\int_{\alpha}^{x}G(t)dt\right)'=$$

ΕΠΙΣΗΜΟ ΑΝΤΙΓΡΑΦΟ

$$= G'(x+1) - G(x+1) + G(x) =$$

$$= e^{x+1}\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt + e^{x+1}\cdot f(x+1) - e^{x+1}\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt + e^{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt =$$

$$= e^{x+1}\cdot f(x+1) + e^{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Επομένως η συνάρτηση ω είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ισχύει

$$x < x+1 \Leftrightarrow \omega(x) < \omega(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(x+1) - \int_{x}^{x+1} G(t)dt < G(x+2) - \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt < G(x+2) + \int_{x}^{x+1} G(t)dt$$

Δ.4. Είναι

$$F(1) = \int_0^1 e^t \cdot f'(t)dt = \left[e^t \cdot f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 (e^t)' \cdot f(t)dt =$$

$$= e\cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^t \cdot f(t)dt \quad (1)$$

Αλλά από υπόθεση ισχύει $F(1) = e\cdot f(1) - 2 \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$e\cdot f(1) - 2 = e\cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^t \cdot f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = -1 - \int_0^1 e^t \cdot f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^1 e^t \cdot f(t)dt = 1 \quad (3)$$

Επίσης

$G(0) = 0$ και $G'(x) = G(x) + e^x f(x)$ οπότε $G'(0) = G(0) + e^0 f(0) = f(0) = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0, G(0))$ είναι:

$$y - G(0) = G'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$$

Επειδή η G είναι κυρτή και η $y = x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της G στο σημείο $O(0, G(0))$ ισχύει ότι $G(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Επειδή η $G(x) - x$ είναι συνεχής το εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 (G(x) - x)dx =$$

$$= \int_0^1 G(x)dx - \int_0^1 x\,dx = \int_0^1 e^x \left(\int_0^x f(t)dt\right)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left(e^x\right)' \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \left[e^x \left(\int_0^x f(t)dt\right)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \left(\int_0^x f(t)dt\right)' dx - \frac{1}{2} =$$

$$= e\int_0^1 f(t)dt - e^0 \cancel{\int_0^0 f(t)dt} - \int_0^1 e^x f(x)dx - \frac{1}{2} \overset{(3)}{=}$$

$$= G(1) - 1 - \frac{1}{2} = \frac{2G(1) - 3}{2}$$

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΛΛΑΜΑΤΑ