ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.ΒΜΕλ3Α(α)

ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:\Delta\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ.

Α2.

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

Α3.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=\ell_1-\ell_2$.
2. Αν $x>0$, τότε $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.
3. Αν $\alpha<\beta$ και c = πραγματικός αριθμός, τότε $\int_\alpha^\beta c\,dx=c\cdot(\beta-\alpha)$.
4. $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%$.
5. $\int_\alpha^\beta \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}dx=\left[-\dfrac{1}{g(x)}\right]_\alpha^\beta$.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΛΑΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αριθμός ωρών x_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Συχνότητα v_i	K_i	$K_i \cdot v_i$	$\left(\bar{x}-x_i\right)^2$	$v_i\left(\bar{x}-x_i\right)^2$
[0,2)	10	4	1	4	25	100
[2,4)	20	8	3	24	9	72
[4,6)	*15*	6	5	30	1	6
[6,8)	20	8	7	56	1	8
[8,10)	35	14	9	126	9	126
ΣΥΝΟΛΑ	100	40		240		312

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + f_3\% + 20 + 35 = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_3\% = 100 - 10 - 20 - 20 - 35 \Leftrightarrow f_3\% = 15$$
$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,10 \cdot 40 = 4,\ v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8,\ v_3 = f_3 \cdot v = 0,15 \cdot 40 = 6$$
$$v_4 = f_4 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8,\ v_5 = f_5 \cdot v = 0,35 \cdot 40 = 14$$

Β2. $\bar{x} = \dfrac{240}{40} = 6$

Β3. $s^2 = \dfrac{312}{40} = 7,8$

Β4. $\bar{x}_{ολ} = \dfrac{240 + 8 \cdot 60}{40 + 60} = \dfrac{240 + 480}{100} = \dfrac{720}{100} = 7,2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3 - 3\sqrt{x}}{2x^2 - x - 1} = \ldots = \dfrac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\left(3 - 3\sqrt{x}\right)\left(3 + 3\sqrt{x}\right)}{2\left(x - 1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3 + 3\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{3^2 - \left(3\sqrt{x}\right)^2}{2\left(x - 1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3 + 3\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{9 - 9x}{2\left(x - 1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3 + 3\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-9(x-1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-9}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{-9}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{1}\right)} = \frac{-9}{(2+1)6} = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2} =$$

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, αφού η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει ρίζες

$x = 1, x = -\frac{1}{2}$

Γ2. $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[-\frac{1}{2}e^{x-1} + \ln(2-x)\right] = -\frac{1}{2}e^{1-1} + \ln(2-1) = -\frac{1}{2}e^0 + \ln 1 = -\frac{1}{2}$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο x=1, θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \textit{(1)}$$

(1) => $$f(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \end{cases}$$

Γ4. Από τον 3ο κλάδο (για x < 1) θα υπολογίσουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{x-1}\right)' + \left[\ln(2-x)\right]' = -\frac{1}{2}e^{x-1}(x-1)' + \frac{1}{2-x}(2-x)' =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-1}\cdot 1 + \frac{1}{2-x}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}e^{x-1} - \frac{1}{2-x}$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}e^{-1-1} - \frac{1}{2-(-1)} = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2+1} = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) = \alpha\frac{\left(e^x\right)'\cdot\left(x^2+2\right) - e^x\cdot\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2} = \alpha\frac{e^x\cdot\left(x^2+2\right) - e^x\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2} = \alpha\frac{e^x\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha\frac{e^0\cdot\left(0^2-2\cdot 0+2\right)}{\left(0^2+2\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha\frac{1\cdot 2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ΕΛΛΑΔΑ ΟΛΓΑ

Δ2. Παρατηρούμε ότι $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $e^x>0$ και $x^2-2x+2>0$ (για την εξίσωση, έχουμε $\Delta=-4<0$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $[e,\pi]$. Επειδή $e<\pi\Rightarrow f(e)<f(\pi)$.

Δ4. $g(x)=(x-1)\left(x^2+2\right)\dfrac{e^x}{x^2+2}\Leftrightarrow g(x)=(x-1)e^x$

Το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο $E=\int_0^1|g(x)|dx$.

$g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)e^x=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Η παράσταση $x-1<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, $e^x>0$ πάντα.

Άρα $g(x)<0$ στο $[0,1]$.

$$E=\int_0^1|g(x)|dx=-\int_0^1(x-1)e^xdx=-\int_0^1(x-1)(e^x)'dx=-\left[(x-1)e^x\right]_0^1+\int_0^1(x-1)'e^xdx=$$

$$=-\left[(1-1)e^1-(0-1)e^0\right]+\int_0^1e^xdx=-(0+1)+\left[e^x\right]_0^1=-1+e^1-e^0=-1+e-1=e-2\ \text{τ.μ.}$$

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΑ ΧΑΛΚΙΔΑ