

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β' ΚΥΚΛΟΣ - Τ.Ε.Ε.
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

α) μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{5+6+6+\alpha^2+2+8+1+11}{8} = 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha^2 + 39 = 40 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$

β) Για $\alpha = 1$ οι αριθμοί είναι:

1, 1, 2, 5, 6, 6, 8, 11

i) διάμεσος: $\delta = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$

ii) επικρατέστερες τιμές: $M_0 = 1$ και 6

iii) εύρος: $R = 11 - 1 = 10$

γ)

απουσίες (x_i)	μαθητές (v_i)	αθροιστική συχνότητα (N_i)	σχετική συχνότητα (f_i)
1	2	2	$2/8 = 0,25$
2	1	3	$1/8 = 0,125$
5	1	4	$1/8 = 0,125$
6	2	6	$2/8 = 0,25$
8	1	7	$1/8 = 0,125$
11	1	8	$1/8 = 0,125$
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 8$		1

- δ) i) $1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$
 ii) $2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7$

ΘΕΜΑ 2°

α) $Df = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - \sqrt{x+2}^2}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda + x}{4} = \frac{\lambda + 2}{4}$$

δ) Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$f(2) = \frac{\lambda + 2}{4}$$

$$\text{Άρα } \frac{\lambda + 2}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda + 2 = 3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

$$\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

Θέμα 3°

$$f(x) = e^x + 2x$$

$$\begin{aligned}\alpha) \quad f'(x) &= e^x + 2 \\ f''(x) &= e^x\end{aligned}$$

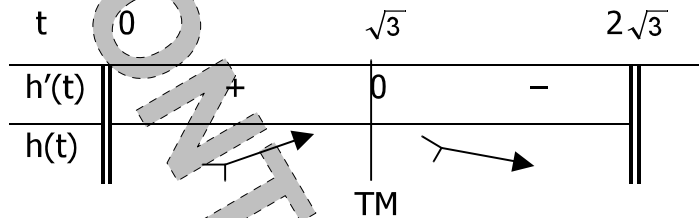
$$\begin{aligned}\text{Άρα } (2-x) f''(x) + x f'(x) - f(x) - e^x &= \\ (2-x) \cdot e^x + x(e^x + 2) - (e^x + 2x) - e^x &= \\ = 2e^x - xe^x + xe^x + 2x - e^x - 2x - e^x &= \\ = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) \quad f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(0) &= e^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ f''(0) &= e^0 = 1\end{aligned}$$

$$\gamma) \text{ παράγουσα: } F(x) = e^x + \frac{2x^2}{2} + c = e^x + x^2 + c$$

Θέμα 4°

α) $h'(t) = 10\sqrt{3} - 10t$
 $h'(t) = 0 \Leftrightarrow 10\sqrt{3} - 10t = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10t = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \text{ sec}$



Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σώμα ανεβαίνει είναι το $[0, \sqrt{3}]$ και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σώμα κατεβαίνει είναι το $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

β) Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος είναι για $t = \sqrt{3} \text{ sec}$

γ) Το μέγιστο ύψος είναι:

$$\begin{aligned} h(\sqrt{3}) &= 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 5(\sqrt{3})^2 = \\ &= 10 \cdot \sqrt{3}^2 - 5\sqrt{3}^2 = 5\sqrt{3}^2 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

δ) Η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$u(t) = h'(t) = 10\sqrt{3} - 10t \quad (\text{m/sec})$$