

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

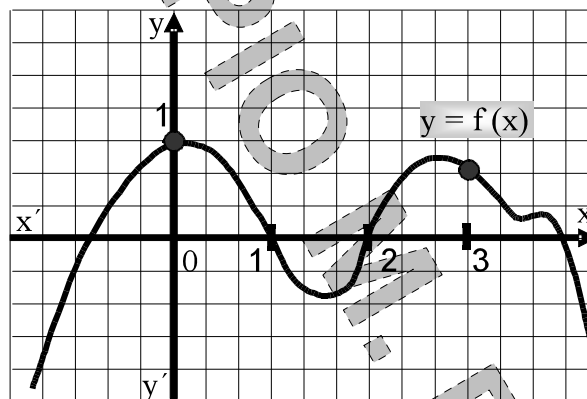
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον

$x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Η συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1 , I_2 , I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$$I_1 = \int_0^3 f(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_2 = \int_0^3 f'(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_3 = \int_0^3 f''(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$	α. $-\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$	β. 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	γ. 1
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$	δ. $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} \cup \{0,1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2°.

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) - g'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στο όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου,

παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3°

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$, $\alpha > 0$ και τον μιγαδικό

$$z = g(x) + xi \text{ με } |\bar{z} + i| \leq |z - 1|.$$

A. Να αποδείξετε, ότι i) η g αντιστρέφεται και ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B. Να αποδείξετε, ότι:

α. $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. $\alpha = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ. $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{\alpha + e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha + e^t} dt < \frac{1}{1+e}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4°

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=1$ και

$$f'(x) = g^2(x) \neq 0, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, να δείξετε, ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7