

**ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31. Η παράγωγος αθροίσματος.

β. 1Λ
2Σ
3Λ
4Λ

γ. $\overline{x'} = -2 \overline{x} = -8$

$$R' = \max' - \min' = -2\min + 2\max = 2(\max - \min) = 2R = 20$$

$$s' = |c|s = 2s = 4$$

δ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33. (ο σχετικός πίνακας).

ΘΕΜΑ 2ο

α. Με το πίνακα διπλής εισόδου ή το δέντροδιάγραμμα του πειράματος βρίσκουμε
 $\Omega = \{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_1M_2, M_1M_3, M_2K, M_2M_1, M_2M_3, M_3K, M_3M_1, M_3M_2\}$

β. $A = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_1, M_2M_3, M_3M_1, M_3M_2\}$

$B = \{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_2K, M_3K\}$

$\Gamma = \{ \}$

γ. Επειδή η αφαίρεση των σφαιρών γίνεται τυχαία (δεξ σελίδα 150 Σχόλιο), τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα, οπότε από τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0,5 \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = P(\emptyset) = 0$$

δ.

•	•
•	•
•	•
•	•
•	•
•	•
•	•
2 ΜΑΥΡΕΣ	1 ΜΑΥΡΗ
ΣΦΑΙΡΕΣ	ΣΦΑΙΡΑ

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έχουμε: $f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)' = 4x - 2$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1/2$$

Επομένως, (κριτήριο 1^{ης} παραγώγου) η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathbb{R}$ για $x_0 = 1/2$ το

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

Β. α) Έχουμε $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 t_i}{4} = \frac{P(A) + P(A') + P(\emptyset) + P(\Omega)}{4} = \frac{1+0+1}{4} = \frac{1}{2}$.

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Είναι

$$P(\emptyset) = 0, P(A), P(A'), P(\Omega) = 1 \quad \text{ή} \quad P(\emptyset) = 0, P(A'), P(A), P(\Omega) = 1$$

Σε κάθε περίπτωση η διάμεσος, ως το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, ισούται με

$$\delta = \frac{P(A) + P(A')}{2} = \frac{1}{2}$$

β) Είναι $s^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(P(A) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(P(A') - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(P(\emptyset) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(P(\Omega) - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(P(A) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 - P(A) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \dots \frac{1}{4} [2P^2(A) - 2P(A) + 1]$$

γ. Είναι $s^2 = \frac{1}{4} f(P(A))$

Από το α ερώτημα έχουμε: $s^2 \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow s \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$ και η ισότητα ισχύει όταν $P(A) = 1/2$. Έτσι,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{\frac{1}{2}} \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ωστε, είναι $CV \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ και η ισότητα ισχύει, όταν $P(A) = 1/2$, που δίνει $P(A') = 1 - P(A) = 1/2$, δηλαδή, ισοδύναμα, όταν $P(A) = P(A')$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω, x η συχνότητα της πρώτης κλάσης και y της τρίτης κλάσης. Για τα κέντρα και τις συχνότητες των κλάσεων έχουμε:

x_i	v_i
-3	x
-1	$3x$
1	y
3	$5x$
ΣΥΝΟΛΟ	$9x+y$

Είναι: $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{-3x - 3x + y + 15x}{9x+y} = \frac{9x+y}{9x+y} = 1$

B. α) Με $y = x$, από τον τύπο $f_i \% = \frac{v_i}{v} 100\%$ βρίσκουμε

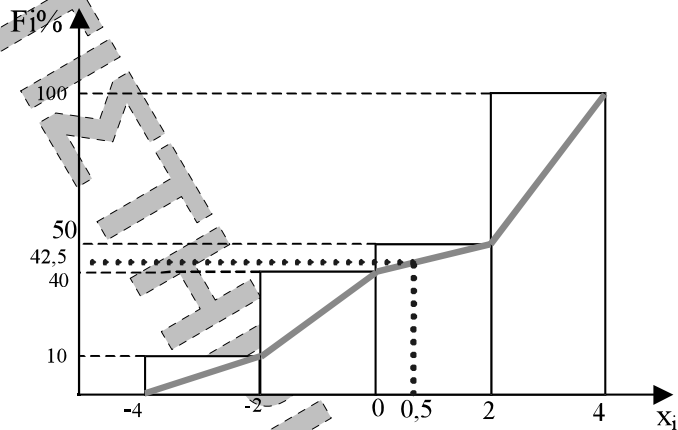
$$f_1 \% = \frac{x}{10x} 100\% = 10\%$$

$$f_2 \% = \frac{3x}{10x} 100\% = 30\%$$

$$f_3 \% = \frac{x}{10x} 100\% = 10\%$$

$$f_4 \% = \frac{5x}{10x} 100\% = 50\%$$

Έτσι, συμπληρώνουμε την τέταρτη στήλη του δοσμένου πίνακα. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το ζητούμενο πολύγωνο φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



β) Η διάμεσος αντιστοιχεί στην παρατήρηση, που έχει αθροιστική συχνότητα 50%. Έτσι, είναι η τετμημένη του σημείου του πολυγώνου των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που έχει τεταγμένη 50. Βρίσκουμε $\delta = 2^\circ\text{C}$.

γ) Το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μικρότερη ή ίση της τιμής $0,5^\circ\text{C}$ είναι η αθροιστική συχνότητα της τιμής $0,5^\circ\text{C}$. Από το σχήμα του Βα ερωτήματος το εκτιμάμε σε 42,5%. Επομένως το $(100 - 42,5)\% = 57,5\%$ των ψυγείων έχει θερμοκρασία μεγαλύτερη από $0,5^\circ\text{C}$.