

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Δίνονται η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ και το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$. Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος.

i) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνονται από την εξίσωση $y = \lambda \cdot x$

ii) Το διάνυσμα $\vec{n} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$.

iii) Αν για τους ακέραιους α, β, γ ισχύουν: $\gamma \mid (\alpha + \beta)$ και $\gamma \mid \alpha$, τότε $\gamma \mid \beta$.

Μονάδες 6

Γ. α) Δίνονται τα σημεία E' και E ενός επιπέδου.

Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες E' και E .

Μονάδες 4

β) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2p \cdot x$.

Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Μονάδες 2

γ) Αν ε η εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5 \quad \text{και} \quad \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{5}{8} \vec{\alpha}.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Μονάδες 6

δ) Αν το διάνυσμα $\vec{v} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha} - \kappa \cdot \vec{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$, να βρείτε την τιμή του κ .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = \kappa^2 + \kappa$ όπου κ ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta$ είναι περιττός.

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{(\alpha^2 + \beta)^2 + 31}{8}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 8

γ) Αν ο ακέραιος κ είναι της μορφής $3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $\alpha + \beta$ με το 3.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο $K(0, \beta)$. Μια ευθεία (ε) που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda > 0$ διέρχεται από το K και τέμνει τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της A' και A , στα σημεία M και P αντίστοιχα.

α) Να γράψετε την εξίσωση της (ε) και να αποδείξετε ότι: $M(-a, -a\lambda + \beta)$ και

$$P(a, a\lambda + \beta).$$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη MP είναι η

$$x^2 + (y - \beta)^2 = a^2 \cdot (1 + \lambda^2).$$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το λ ώστε η ακτίνα του κύκλου του ερωτήματος (β) να είναι ίση με την απόσταση των κορυφών της υπερβολής.

Μονάδες 4

δ) Αν ε η εκκεντρότητα της υπερβολής και ο κύκλος του ερωτήματος (β) διέρχεται

από τις εστίες της, να αποδείξετε ότι: $\lambda = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2}$.

Μονάδες 8