

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

β) Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3,5

Β. α) Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0)$. Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $g(x) = [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 + 2001$ είναι σταθερή.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) $g(x) = 2001$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-4)$ ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2,5

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - \bar{z}}$, $z \neq 1$

α) Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $f(2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{f(z) - 2}{f(z) + i} \right| = |z|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

δ) Αν $|z| = 1$ και M είναι η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)x + 6}{x + \beta} \quad \text{με } x \in (-1, +\infty),$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=2$ και $x = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x + 1}, \quad x > -1.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

β) Να βρείτε συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x) = f(x)$, για κάθε $x > -1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(0,2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x) = \frac{G(x)}{x + 1}$, $x > -1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$\int_1^x f(t) dt + \int_x^1 g(t) dt = x^2 - 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

και έστω C_f, C_g οι γραφικές τους παραστάσεις.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο λύσεις ϱ_1, ϱ_2 με $\varrho_1 < 1 < \varrho_2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (ϱ_1, ϱ_2) .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\varrho_1, \varrho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = -2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο $\mathbb{R}$, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_0=\xi$ του ερωτήματος α) ii).

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον άξονα των y .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7