ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Εξίσωση εφαπτομένης στο x_0: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (Σελ. 214 σχολικού βιβλίου)

Α2. (Σελ. 217 σχολικού βιβλίου)

Β1. $\alpha \to$ Λάθος, $\beta \to$ Λάθος, $\gamma \to$ Σωστό

Β2. $\alpha \to 3$, $\beta \to 1$, $\gamma \to 5$, $\delta \to 2$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z \in C$ με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α. Έχουμε:

$$w_1 = f(9-5i) = \frac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \ldots = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}(1-i) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Είναι:

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]^{2004} = \text{συν}\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) =$$

$$\text{συν}(-501\pi) + i\eta\mu(-501\pi) = \text{συν}(-\pi) + i\eta\mu(-\pi)$$

β. Σωστό το Β
Είναι:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Φροντιστήριο ΕΠΙΛΟΓΗ

γ. Είναι : $K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Οπότε έχουμε: $M \cdot X = K$ (1).

Είναι $|M| = -1 \neq 0$ δηλαδή ο Μ αντιστρέφεται και

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η (1) με πολλαπλασιασμό από αριστερά με το M^{-1} γίνεται:

$M^{-1}(M \cdot X) = M^{-1} \cdot K$ ή $(M^{-1} \cdot M) \cdot X = M^{-1} \cdot K$ ή $I \cdot X = M^{-1} \cdot K$

ή $X = M^{-1} \cdot K$ ή $X = M^{-1} \cdot K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. **1ος τρόπος:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$.

Η g είναι συνεχής στο [0, 1] (f παραγωγίσιμη στο [0, 1] άρα και συνεχής).

Επίσης:

$g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1$

και

$g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με παράγωγο $g'(x) = f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα η g είναι 1 στο [0, 1], οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $x \in (0, 1)$ ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ στο οποίο η ευθεία $y = 3$ τέμνει την C_f.

2ος τρόπος:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] και επειδή f([0, 1]) = [2, 4] η ευθεία $y = 3$ τέμνει σε μοναδικό σημείο την C_f.

β. Επειδή ($f'(x) > 0$, $x \in (0, 1)$ αφού η f συνεχής και γνήσια αύξουσα στο [0, 1] θα ισχύουν

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{1}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{1}{5}) < 4$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{2}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{2}{5}) < 4$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{3}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{3}{5}) < 4$$

Φροντιστήριο ΕΠΙΛΟΓΗ Καλαμάτα

$0<\frac{4}{5}<1 \Leftrightarrow f(0)<f(\frac{4}{5})<f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{4}{5})<4$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\cdot 4<f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})<4\cdot 4 \Leftrightarrow 2<\frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}<4$$

Άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ ώστε να είναι:

$$f(x_1)=\frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$$

γ. Θεωρούμε $h(x) = f(x) – 2x$, $x\in[0, 1]$ με $h'(x) = f'(x) – 2$, $x\in[0, 1]$.

Είναι:

$h(0) = f(0) = 2$

$h(1) = f(1) - 2\cdot 1 = 4 - 2 = 2$

Άρα το $h(0) = h(1)$, οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_2\in(0, 1)$ ώστε να είναι $h'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$ (1).

Έστω (ε) η εφαπτόμενη της C_1 στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = f'(x_2)$ και (η) η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 2000$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta = 2$.

Από την (1) προκύπτει $\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = 2$, άρα (ε) // (η)

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Έχουμε ότι $f(t)=\frac{\alpha t}{1+(\frac{t}{\beta})^2},\ t\geq 0$

Είναι: $f'(t)=\frac{\alpha(1+\frac{t^2}{\beta^2})-\alpha t\cdot\frac{2t}{\beta^2}}{[1+(\frac{t}{\beta})^2]^2}=\frac{\alpha+\frac{\alpha t^2}{\beta^2})-\frac{2\alpha t^2}{\beta^2}}{[1+(\frac{t}{\beta})^2]^2}=\frac{\alpha\beta^2-\alpha t^2}{\beta^2[1+(\frac{t}{\beta})^2]^2}=$

$$\frac{\alpha(\beta-t)(\beta+t)}{\beta^2[1+(\frac{t}{\beta})^2]^2}$$

Ισχύει: $f(6) = 15$ και $f'(6) = 0$ (αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 6$ του διαστήματος $(0, +\infty)$, οπότε από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $f'(6) = 0$). Είναι λοιπόν:

Φροντιστήριο ΕΠΙΛΟΓΗ

$$\begin{cases} f(6)=15 \\ f'(6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+(\frac{t}{\beta})^2} \\ \alpha(\beta-6)(\beta+6)=0 \end{cases} \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{2}=15 \\ \beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=6 \end{cases}$$

Οπότε είναι: $f'(t)=\dfrac{5t}{1+(\frac{t}{6})^2},\ t\geq 0$

β. Πρέπει να είναι:

$$f(t)\geq 12 \Leftrightarrow \frac{5t}{1+(\frac{t}{6})^2}\geq 12 \Leftrightarrow 5t\geq 12+12(\frac{t}{6})^2 \Leftrightarrow \frac{t^2}{3}-5t+12\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2-15t+36\leq 0 \Leftrightarrow t\in[3,12]$$

Φροντιστήριο "ΕΠΙΛΟΓΗ" Καλαμάτα