ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε
ΠΙΛΟΓΗ
Ιατροπούλου 12 & Σιδ. Σταθμού - Καλαμάτα
Τηλ: (27210) 95352 & 96390, Internet: http://www.epil.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

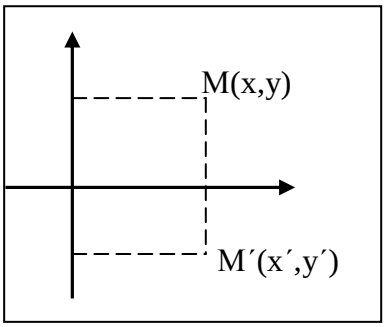
Φροντιστήριο "ΕΠΙΛΟΓΗ" Καλαμάτα

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 62
β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 67
γ. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 68

Β1 T_1: « Συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x» Η σχηματική παράσταση φαίνεται δίπλα.



με

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{cases}$$

άρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

δηλαδή $T_1 \rightarrow (3)$

T_2: « Στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ »

Ο πίνακας είναι $\begin{bmatrix} συνθ & -ημθ \\ ημθ & συνθ \end{bmatrix}$ και για $\theta = \frac{\pi}{2}$ γίνεται:

$$\begin{bmatrix} συν\frac{\pi}{2} & -ημ\frac{\pi}{2} \\ ημ\frac{\pi}{2} & συν\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $T_2 \rightarrow (2)$

Β2 α. Είναι $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως είναι:

$$A = A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

Είναι $|A|=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$,

άρα ο Τ είναι κανονικός.

β. Για τον Τ είναι:

$$\begin{cases}x'=0\cdot x+(-2)y\\ y'=-2x+0\cdot y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-2y\\ y'=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x'(1)\\ x=-\frac{1}{2}y'(2)\end{cases}$$

Αν Μ(x,y) είναι σημείο της (ε) με (ε): 2x-y +5 = 0 (3),
και Μ΄(x΄,y΄) η εικόνα του Μ μέσω του μετασχηματισμού Τ τότε:

$$(3)\xrightarrow[(2)]{(1)}2\left(-\frac{1}{2}y'\right)-\left(-\frac{1}{2}x'\right)+5=0\Leftrightarrow -y'+\frac{1}{2}x'+5=0\Leftrightarrow -2y'+x'+10=0$$

άρα είναι -2y + x +10 = 0 η εξίσωση της εικόνας της (ε) ως προς τον μετασχηματισμό Τ.

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

α. Είναι:

$$z=\frac{5+i}{2+3i}=\frac{(5+i)(2-3i)}{2^2+3^2}=\frac{10-15i+2i+3}{13}=\frac{13-13i}{13}=1-i$$

β. Είναι $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ και $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \eta\mu\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

άρα $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

Επομένως $z=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

γ. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 104 → Β

Φροντιστήριο ΕΠΙΛΟΓΗ Καλαμάτα

δ. Επειδή $z=\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ είναι:

$$z^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=2^2\cdot\left[\text{συν}(-\pi)+i\eta\mu(-\pi)\right]=-4$$

άρα **Δ**.

Β. Είναι $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|z-1|}{|z-i|}=1\Leftrightarrow|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow|z-(1+0i)|=|z-(0+i)|$ (1).

Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών z είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(1,0) και Β(0,1)

Από την (1), για $z=x+yi$, $x,y\in R$ είναι:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1\Leftrightarrow y=x$$

δηλαδή η μεσοκάθετος του ΑΒ έχει εξίσωση $y=x$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Είναι: $\lim\limits_{x\to5^-}f(x)=5^2-8\cdot5+16=1$

και

$$\lim_{x\to5^+}f(x)=(\alpha^2+\beta^2)\ln(5-5+e)+2(a+1)e^{5-5}=$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+1)=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$$

Β. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=5$ πρέπει:

$$\lim_{x\to5^-}f(x)=\lim_{x\to5^+}f(x)=f(5)\Leftrightarrow1=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+2a+1=0\Leftrightarrow(\alpha+1)^2+\beta^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \text{και}\\ \beta=0\end{cases}$$

Γ. Για $\alpha=-1$ και $\beta=0$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-8x+16, & 0<x<5\\ \ln(x-5+e), & x\geq5\end{cases}$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5+e)=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-5+e)=+\infty$

Φροντιστήριο ΕΠΙΛΟΓΗ Καλαμάτα

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $f'(t)=\frac{8}{t+1}-2, t\geq 0$.

Επειδή $\frac{1}{t+1}=\frac{(t+1)'}{t+1}$ με $t+1>0$, είναι $f(t)=8\ln(t+1)-2t+c$,

$f(0)=0$ (το φάρμακο χορηγείται πρώτη φορά),

άρα $8\ln(0+1)-2\cdot 0+c \Leftrightarrow c=0$

και $f(t)=8\ln(t+1)-2t,\ t\geq 0$.

β. Είναι $f'(t)=\frac{8}{t+1}-2=\frac{8-2(t+1)}{t+1}=\frac{6-2t}{t+1}$, ομόσημη του $6-2t$

Είναι:

t		0		3	
6 - 2t			+		-
f΄(t)			+		-
f(t)		↗		↘	

Για t = 3 η συγκέντρωση είναι μέγιστη.

γ. Έχουμε:

- Για t = 8 είναι $f(8)=8\ln 9-16=8\ln 3^2-16=16\ln 3-16=16(\ln 3-1)$
  Επειδή $3>e$ είναι $\ln 3>\ln e=1$, άρα $f(8)>0$.
  Δηλαδή υπάρχει φάρμακο, άρα και επίδραση στον οργανισμό.

- Για t = 10 είναι $f(10)=8\ln 11-20\cong 8\cdot 2{,}4-20=-0{,}8<0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [8,10], το σύνολο τιμών της f στο [8,10] είναι [f (10), f (8)]. Το $0\in[f(10),f(8)]$ επομένως, υπάρχει $t_0\in(8,10)$ έτσι ώστε $f(t_0)=0$ δηλαδή τη χρονική στιγμή t_0 η συγκέντρωση είναι 0, άρα στο $(t_0, 10)$ η συγκέντρωση είναι αρνητική, δηλαδή δεν υπάρχει φάρμακο, άρα και επίδραση στον οργανισμό.

ΕΠΙΛΟΓΗ Φροντιστήριο