ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
ΕΠΙΛΟΓΗ
Ιατροπούλου 3 & Χρ. Παγώνη 12 - Καλαμάτα
Τηλ.: 27210 95352 & 27210 96390, e-mail: info@epil.gr
Διευθ. Ιστοσελίδας: www.epil.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση γίνεται : $2x^2 - |w-4-3i|\cdot x + 2|z| = 0$

- Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(-|w-4-3i|\right)^2 - 4\cdot 2\cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$

  $|w-4-3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \dfrac{|w-4-3i|^2}{16}$ **(1)**

- $1^{ος}$ **τρόπος** Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{|w-4-3i|}{4} = 1$

  $\Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

- $2^{ος}$ **τρόπος** Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα

  $2 - |w-4-3i| + 2|z| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w-4-3i| + 2\dfrac{|w-4-3i|^2}{16} = 0$

  $\overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} 16 - 8|w-4-3i| + |w-4-3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$

  $\left(|w-4-3i| - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

  ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

- **(1)** $\overset{(2)}{\Rightarrow} |z| = \dfrac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

  ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$

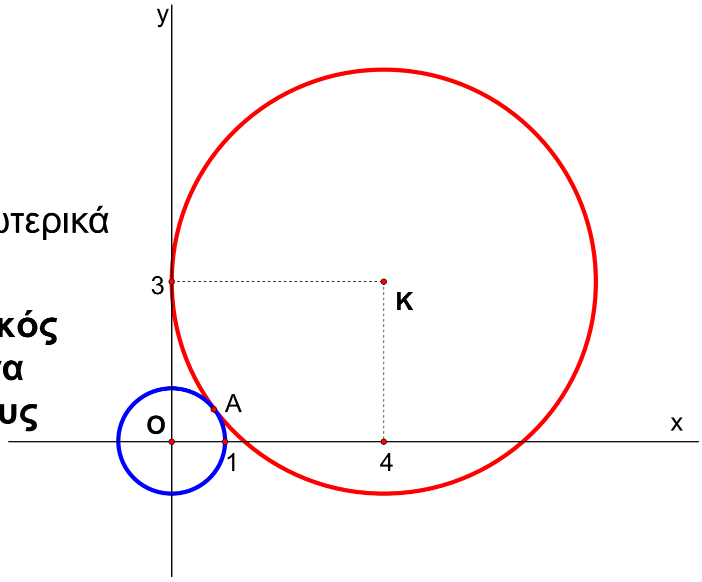
B2. $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

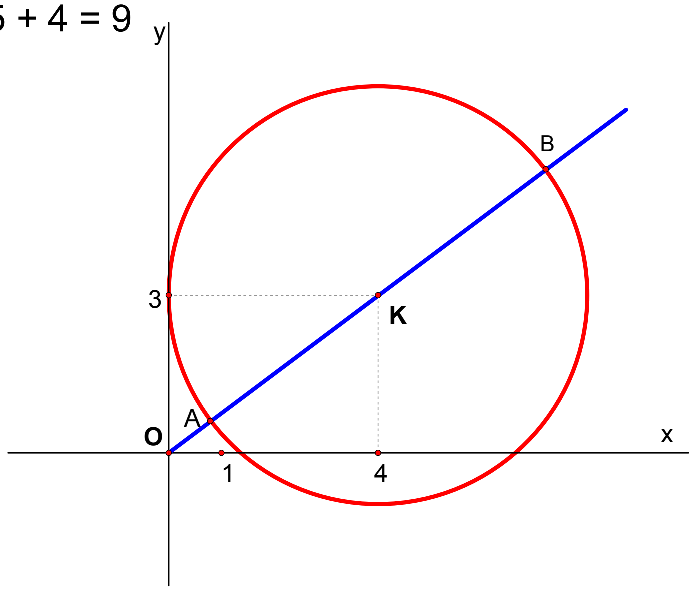
Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$,

άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο Α (σχήμα)

Επομένως **υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.**



B3. $|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$



$|z - w| \le |z| + |-w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z - w| \le 10}$

$|z + w| \le |z| + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z + w| \le 10}$

Β4. • $\left|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}\right| = 5 \Leftrightarrow \left|z\cdot(2z - 3 - 2\bar{z})\right| = 5 \Leftrightarrow$

$\left|z\right|\cdot\left|2z - 2\bar{z} - 3\right| = 5 \overset{|z|=1}{\Leftrightarrow} \left|2(z - \bar{z}) - 3\right| = 5 \Leftrightarrow$

$\left|2\cdot 2\text{Im}(z)\cdot i - 3\right| = 5 \Leftrightarrow \left|-3 + 4\text{Im}(z)\cdot i\right| = 5$

$\sqrt{(-3)^2 + \left[4\text{Im}(z)\right]^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + 16\text{Im}^2(z) = 25 \Leftrightarrow$

$16\text{Im}^2(z) = 16 \Leftrightarrow \text{Im}^2(z) = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \pm 1$

• $\left|z\right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)} = 1 \Leftrightarrow \text{Re}^2(z) + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\text{Re}^2(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

Επομένως $\mathbf{z = \pm i}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in IR$ είναι : $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$

$(x^2)'f(x) + x^2f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x^2f(x) - x^3 + f(x)\right]' = 0$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $x^2f(x) - x^3 + f(x) = c$

Για $x = 1$ έχω : $f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως για κάθε $x \in IR$ είναι :

$x^2f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$

$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2\cdot(x^2+1) - (x^3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**

Γ2. Η f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$**

Γ3. $f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$$5(x^2+1)^3 - 8 \le 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2+1)^3 \le 8(x^2+1)^2 + 8 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2+1)^3 \le 8\left[(x^2+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1} \le \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2+1\right) \le f\left(2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 + 1 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow$$

$$|x| \le 1 \Leftrightarrow \mathbf{-1 \le x \le 1}$$

Γ4. Έστω συνάρτηση h, με $h(x) = x\cdot\int_0^{x^3-x} f(t)\,dt$, $x \in [0\ ,\ 1]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση f_1, με

$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι παρ/μη στο $[0\ ,\ 1]$,άρα και συνεχής

- η h είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 1]$ ως πράξεις των συνεχών f_1, f_2, με $f_2(x) = x^3 - x$ και f_3, με $f_3(x) = x$.
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

με $h'(x) = x\cdot f\left(x^3 - x\right)\cdot\left(3x^2 - x\right) + \int_0^{x^3-x} f(t)\,dt$

- $h(0) = 0\cdot\int_0^0 f(t)\,dt = 0$ και

$h(1) = 1\cdot\int_0^0 f(t)\,dt = 0$

Άρα από θ. Rolle

η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0\ ,\ 1)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\,dt = -\xi\cdot(3\xi^2 - 1)\cdot f(\xi^3 - \xi).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x + \int_1^x\left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt\right)du$ **(1)**

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε :

$f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt$, $x > 0$ **(2)**

Παραγωγίζουμε την (2) και έχουμε για κάθε $x > 0$

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)\cdot f''(x) = \left(f'(x)\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f(x)\cdot f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2}$$

Δ2.α. Είναι $f(x)\cdot f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$,άρα $f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$.
Η f είναι συνεχής στο $(0\,,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$, άρα από συνέπειες θ. Bolzano, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$.
Είναι

$$f(1) = 1 + \int_1^1\left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt\right)du = 1 > 0,$$

επομένως **$f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$**.
Η f' είναι συνεχής στο $(0\,,+\infty)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$, άρα από συνέπειες θ. Bolzano, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$.

Είναι $f'(1) = 1 + \displaystyle\int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt = 1 > 0$,

επομένως **$f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$**.

β. $(f'(x))^2 = 1 + f(x)\cdot f''(x)$, για κάθε $x>0$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f'(x) = \sqrt{1 + f(x)\cdot f''(x)}$

Η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+f(x)\cdot f''(x)} = \sqrt{1 + \lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot \lim_{x\to 0^+} f''(x)}$$

$$= \sqrt{1 + f(0)\cdot f''(0)} \overset{f(0)=0}{=} \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

Δ3.α. $$g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)\cdot f'(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \overset{(2)}{=} \frac{-1}{f^2(x)}$$

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad g'(1) = \frac{-1}{f^2(1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

(ε) : εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1\,,g(1))$

$(\varepsilon): y - g(1) = g'(1)\cdot(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = -x + 2$

Η g είναι κυρτή άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής Μ, άρα

$g(x) \geq 2 - x$, για κάθε $x > 0$

Δ3.β. Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g(x) \geq 2 - x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq (2-x)\cdot f(x)$$

Για $x = 0$ είναι : $f'(0) > (2-0)\cdot f(0)$

άρα $f'(x) \geq (2-x)\cdot f(x)$, για κάθε $x \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$f'(x) - (2-x)\cdot f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$ και το "=" δεν ισχύει παντού

Επομένως $\int_0^1 [f'(x) - (2-x)\cdot f(x)]\,dx > 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[f(x)]_0^1 > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$f(1) - f(0) > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$1 > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx > 1}$$

Δ4. Είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in [0\ ,\ 1]$

$$E = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2\cdot f'(x)\,dx$$

$$= \left[[f'(x)]^2\cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 2\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f(x)\,dx$$

$$\overset{(2)}{=} [f'(1)]^2\cdot f(1) - \cancel{[f'(0)]^2\cdot f(0)} - \int_0^1 2\cdot f'(x)\cdot\left[[f'(x)]^2 - 1\right]dx$$

$$= 1 - 2\int_0^1 \left[[f'(x)]^3 - f'(x)\right]dx$$

$$= 1 - 2\int_0^1 [f'(x)]^3 dx + 2\int_0^1 f'(x)dx$$

Άρα $E = 1 - 2E + 2[f(x)]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3E = 1 + 2f(1) - \cancel{2f(0)} \quad \Leftrightarrow$

$3E = 1 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3E = 3 \quad \Leftrightarrow \quad$ **$E = 1$ τ.μ.**

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια ´´Κελάφας´´