ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε. ΕΠΙΛΟΓΗ
Ιατροπούλου 3 & Χρ. Παγώνη 12 - Καλαμάτα
Τηλ.: 27210 95352 & 27210 96390, e-mail: info@epil.gr
Διευθ. Ιστοσελίδας: www.epil.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό*, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

***έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left[2e^x(2x-3)\right]' = 2e^x(2x-3) + 4e^x = 2e^x(2x-1)$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x(2x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ την τιμή $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{e}$

B2. $P(A) = x_1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

B3. Έστω ότι A, B είναι ασυμβίβαστα

Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 0 \to \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα **τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα**.

B4. $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

- $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$ **(1)**
- Θα δείξουμε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B - A) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ που ισχύει διότι

$A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

άρα $\frac{1}{6} \leq P(A' - B')$ **(2)**

Από (1) και (2) : $\mathbf{\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \overset{F_5=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 + 1 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \boldsymbol{\kappa = 1} \end{cases}$$

$$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \overset{\kappa=1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$\Delta = 289$ και $\lambda = 10$ ή $\lambda = -7$

Όμως $F_1\% = \lambda \geq 0$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 10}$

Γ2. $f_1\% = F_1\% = \lambda = \mathbf{10}$

$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = \mathbf{30}$

$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = \mathbf{20}$

$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$

$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = \mathbf{30}$

$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = \mathbf{10}$

Γ3.
- $25\% = f_1\% + \dfrac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16$ **(1)**
- $25\% = \dfrac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24$ **(2)**
- $x_4 - x_2 = 2c \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} 2c = 8 \Leftrightarrow \mathbf{c = 4}$

1^η κλάση : [α , α + 4), 2^η κλάση : [α + 4 , α + 8)

$$x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 10}$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	f_i%	F_i	F_i%
[10 , 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	-	100	-	-

Γ4. Το 40% (f_4% + f_5%) των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις
<u>Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν ν παρατηρήσεις</u>

$40\nu = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40\nu = 80000 \Leftrightarrow$ **$\nu = 2000$**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α.

- $P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}}$
- $P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$
- $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} + 1\right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

- $P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{12}}$

Δ1.β. • $f'(\omega) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} \le 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} 1-\omega^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\omega^2 \ge 1 \Leftrightarrow |\omega| \ge 1 \Leftrightarrow \omega \ge 1$ ή $\omega \le -1$

Άρα $A = \{-1\ ,\ \omega_3\ ,\ \omega_4\}$

και $P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

• $f(\omega) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} > 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} \omega > 0$

Άρα $B = \{\omega_3\ ,\ \omega_4\}$

και $P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

• $x^2 + \omega x \ge -\dfrac{1}{4}$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow x^2 + \omega x + \dfrac{1}{4} \ge 0$, για κάθε $x \in IR$

Πρέπει $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow \omega^2 \le 1 \Leftrightarrow |\omega| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \omega \le 1$

Άρα $\Gamma = \{-1\ ,\ 0\}$

και $P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

• $A - B = \{-1\}$ και $P(A-B) = P(-1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

Δ2. • $f'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \Rightarrow \dfrac{1-x_0^{\ 2}}{(x_0^{\ 2}+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$(x_0^{\ 2}+1)^2 = 1 - x_0^{\ 2} \Leftrightarrow x_0^{\ 4} + 2x_0^{\ 2} + \cancel{1} = \cancel{1} - x_0^{\ 2} \Leftrightarrow$

$x_0^{\ 4} + 3x_0^{\ 2} = 0 \Leftrightarrow x_0^{\ 2}(x_0^{\ 2}+3) = 0 \overset{x_0^{\ 2}+3\neq 0}{\Leftrightarrow} x_0^{\ 2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$, άρα

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x+1}$

Δ3. $\omega_i = -1\ ,\ 0\ ,\ \omega_3\ ,\ \omega_4$

- $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = \omega_3 + 1$
- $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = \omega_4 + 1$

Είναι $1 < \omega_3 < \omega_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega_4 = 4}$

- $\delta_{\omega_\kappa} = \dfrac{0 + \omega_3}{2} = \dfrac{\omega_3}{2}$
- $\delta_{y_\kappa} = \dfrac{1 + \omega_3 + 1}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2}$

Είναι $2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \Leftrightarrow 2\dfrac{\omega_3}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$

$2\omega_3 = 2 + \omega_3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega_3 = 2}$

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια ΄΄Κελάφας΄΄