ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Α3. **α.** Σ , **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Σ*, **ε.** Λ.

*** έπρεπε να δοθεί ότι η συνάρτηση δεν είναι σταθερή στο [α , β]**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$2z - i\bar{z} = 3 \Leftrightarrow 2(x + yi) - i(x - yi) = 3 \Leftrightarrow 2x + 2yi - xi - y - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - y - 3) + (2y - x)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4y - y = 3 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{z = 2 + i}$$

Β2. $$|w + z| = |z^2| \overset{z = 2 + i}{\Leftrightarrow} |w + 2 + i| = |2 + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$|w + 2 + i| = \left(\sqrt{2^2 + 1^2}\right)^2 \Leftrightarrow |w + 2 + i| = 5$$

άρα ο ζητούμενος γ.τ. των εικόνων του w είναι

ο κύκλος με κέντρο Κ (-2 , - 1) και ακτίνα ρ = 5

Β3. $$u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1} \overset{z = 2 + i}{=} \frac{2 - i + i(2 + i)}{2 - i - 1} = \frac{2 - i + 2i - 1}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i}$$

$$= \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$u^{2010} = i^{2010} = \left(i^4\right)^{502} \cdot i^2 = 1^{502} \cdot (-1) = \mathbf{-1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (x^3 + 3x + συνx - 2)' = 3x^2 + 3 - ημx > 0$, διότι
$3x^2 \geq 0$ και $3 - ημx > 0$ αφού $-1 \leq ημx \leq 1$.
Άρα η **f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.**

Γ2. • η f είναι συνεχής στο $[0 , π]$, ως άθροισμα συνεχών
• $f(0) = συν0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$
• $f(π) = π^3 + 3π + συνπ - 2 = π^3 + 3π - 3 = π^3 + 3(π - 1) > 0$
Από Θ. Bolzano **η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0 , π)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , π)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.**

Γ3. $f(x^2 + 8) = f(6x) \underset{f\uparrow}{\overset{f\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}} x^2 + 8 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 2$ ή $x = 4$

Γ4. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + 3x + συνx - 2 + 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(x^2 + 3 + \frac{συνx - 1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(x^2 + 3\right) - \lim_{x\to 0}\frac{συνx - 1}{x} = 3 - 0 = \mathbf{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x} + 2x = x + \dfrac{3}{x} + 2x = 3x + \dfrac{3}{x}$, $x \in IR^*$

$$f'(x) = \left(3x + \frac{3}{x}\right)' = 3 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^2 - 3}{x^2},\ x \in IR^*$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	‖	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	‖	↘		↗
		τ. μέγιστο				τ. ελάχιστο	

τοπικό μέγιστο : $f(-1) = -3 - 3 = -6$
τοπικό ελάχιστο : $f(1) = 3 + 3 = 6$

Δ2. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3x + \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y΄y)**

Πλάγιες ασύμπτωτες

▷ στο $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{3x + \frac{3}{x}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(3 + \frac{3}{x^2}\right) = 3 = \lambda$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to -\infty}\left(3x + \frac{3}{x} - 3x\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{3}{x} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 3x$**

▷ στο $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x + \frac{3}{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(3 + \frac{3}{x^2}\right) = 3 = \lambda$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left(3x + \frac{3}{x} - 3x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 3x$**

Δ3. Είναι $f(1) = 6$ και $f΄(1) = 0$, άρα

$(\varepsilon): y - f(1) = f΄(1)\,(x - 1) \Leftrightarrow y - 6 = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = 6}$.

Δ4. $\lambda_{AB} = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{10 - 6}{2} = 2$

Πρέπει $f΄(\xi) = 2 \Leftrightarrow 3 - \dfrac{3}{\xi^2} = 2 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{3}{\xi^2} \Leftrightarrow$

$$\xi^2 = 3 \overset{\xi > 0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

άρα $\mathbf{M\left(\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right)}$