

Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης των θετικών μαθημάτων της Α' Ημερησίου Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2013-14

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 32/2013 του Δ.Σ.) σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες σχετικά με τη διδακτέα ύλη των θετικών μαθημάτων της Α' Ημερησίου Γενικού Λυκείου. Συγκεκριμένα:

Μαθηματικά ΓΕΝΙΚΑ

Η προτεινόμενη διαχείριση της ύλης των Μαθηματικών της Α' Λυκείου έχει σκοπό να υποστηρίξει τον εκπαιδευτικό στην προσπάθεια υλοποίησης των στόχων του ΑΠΣ, αναδεικνύοντας μέσα από συγκεκριμένες αναφορές και παραδείγματα, το πνεύμα της διδασκαλίας που το διέπει. Στόχος είναι ο εκπαιδευτικός να βοηθηθεί να σχεδιάσει ο ίδιος κατάλληλες για την τάξη του διδακτικές παρεμβάσεις συμβατές με το ΑΠΣ. Ο προτεινόμενος διδακτικός χρόνος για το κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικός για να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό στο διδακτικό του σχεδιασμό, ώστε να ολοκληρωθεί η ύλη μέσα στη σχολική χρονιά. Η διδακτική διαχείριση που προτείνεται δίνει τη δυνατότητα ορισμένα τμήματα της διδακτέας ύλης να μπορούν να ολοκληρωθούν και οι αντίστοιχοι διδακτικοί στόχοι να επιτευχθούν, σε χρόνο μικρότερο από τον χρόνο που θα απαιτείτο με μια παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση. Για παράδειγμα, η παράγραφος που αφορά στη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$ μπορεί, με μια καλά σχεδιασμένη δραστηριότητα και κατάλληλη διδακτική διαχείριση, να ολοκληρωθεί πλήρως μέσα στον προβλεπόμενο χρόνο με τρόπο συμβατό με το ΑΠΣ. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις είναι σαφές ότι ο διατιθέμενος χρόνος δεν είναι επαρκής για να γίνει η διδακτική διαχείριση ολόκληρης της διδακτέας ύλης μιας ενότητας σύμφωνα με το πνεύμα διδασκαλίας που διέπει το ΑΠΣ. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο εκπαιδευτικός, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαιτερότητες της τάξης του και τον διατιθέμενο χρόνο, θα πρέπει να οργανώσει με τέτοιο τρόπο τη διδασκαλία ώστε να αναδείξει στον καλύτερο δυνατό βαθμό τα στοιχεία που αναφέρονται στο ΑΠΣ. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία των κριτηρίων ισότητας τριγώνων ένας εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να εμπλέξει τους μαθητές της τάξης του σε μια δραστηριότητα που οδηγεί στην εικασία και στην απόδειξη του 2^{ου} κριτηρίου ισότητας τριγώνων, ενώ αντίθετα να παραλείψει την απόδειξη του 3^{ου} κριτηρίου ισότητας, η οποία, αν και παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον, κρίνει ότι δεν θα προσφέρει ιδιαίτερα στην τάξη του, γιατί θα προκαλέσει σημαντική δυσκολία. Άλλος εκπαιδευτικός μπορεί να κρίνει διαφορετικά, γιατί θεωρεί ότι η τάξη του έχει άλλες δυνατότητες. Το σημαντικό σε κάθε περίπτωση είναι να επιδιωχθεί η εννοιολογική κατανόηση μέσα από την ανάπτυξη ουσιαστικής μαθηματικής δραστηριότητας των ίδιων των μαθητών στην τάξη και όχι απλά η εξάσκηση σε τεχνικές.

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ

I. Εισαγωγή

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως της πιθανότητας, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α' Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεων τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

II. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2013)

Εισαγωγικό κεφάλαιο

Ε.2. Σύνολα

Κεφ.1^ο: Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα

1.2 Έννοια της Πιθανότητας (εκτός της υποπαραγράφου «Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας»)

Κεφ.2^ο: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των αποδείξεων των ιδιοτήτων 3 και 4)

Κεφ.3^ο: Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

3.2 Η Εξίσωση $x^v = \alpha$

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Κεφ.4^ο: Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Κεφ.5^ο: Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το S_n)

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το S_n)

Κεφ.6^ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης (εκτός της υποπαραγράφου «Απόσταση σημείων»)

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

Κεφ.7^ο: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης : $f(x) = ax^2$

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης : $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

III. Διαχείριση διδακτέας ύλης

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην **§Ε.1**, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

§Ε.2

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου. Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

Κεφάλαιο 1^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή με την έννοια της πιθανότητας στις προηγούμενες τάξεις με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της πιθανότητας με τον κλασικό ορισμό και εξασκούνται στο βασικό λογισμό πιθανοτήτων με χρήση της θεωρίας συνόλων. Ειδικότερα:

§1.1

Είναι σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να αναγνωρίζουν ένα πείραμα τύχης και να διακρίνουν τις διαφορές που έχει από ένα αιτιοκρατικό πείραμα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.4 του ΑΠΣ), με στόχο να μπορέσουν στη συνέχεια να αντιληφθούν την ανάγκη εισαγωγής της έννοιας της πιθανότητας για τη μελέτη τέτοιων πειραμάτων.

Ο προσδιορισμός και η αναπαράσταση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης είναι μια διαδικασία δύσκολη για τους μαθητές, ειδικά όταν αντιμετωπίζουν ένα πείραμα τύχης που πραγματοποιείται σε δυο ή περισσότερα στάδια. Εργαλεία, όπως το δένδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου, βοηθούν στη μοντελοποίηση ενός πειράματος τύχης και στην κατασκευή του δειγματικού χώρου (προτείνεται η Δ.5 του ΑΠΣ).

Σημαντική για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων είναι, επίσης, η μετάφραση σχέσεων μεταξύ ενδεχομένων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.6 και Δ.7 του ΑΠΣ).

§1.2

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας προτείνεται να είναι η κατάληξη της μελέτης της σχετικής συχνότητας και όχι να δοθεί απλά ο τυπικός ορισμός (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο Πθ4 του ΑΠΣ). Οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων εισάγονται για πρώτη φορά και, εκτός από τον απλό χειρισμό τους, είναι σημαντικό να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση προβλημάτων που δε θα μπορούσαν να λυθούν με τον κλασικό ορισμό (π.χ. δραστηριότητα Δ.8 του ΑΠΣ).

Να μην διδαχθεί η εφαρμογή 3 στη σελίδα 36, καθώς και ασκήσεις με ανισότητες

Να μην γίνουν οι ασκήσεις της Β Ομάδας της παραγράφου 1.2

Κεφάλαιο 2°

(Προτείνεται να διατεθούν 16 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λ.π.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

§2.1

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, $1.333...$, $1,010101...$, $1,1010010001...$, καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των

$$\frac{4}{2}, \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\pi}{6}, -1.333 \text{ κ.ά.}$$

πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\pi}{6}$, -1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$, $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$.

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι

εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού: $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$.

§2.2

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0, \text{ ενώ } \alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

και στα σχόλια 1 και 2 της σελ. 56.

§2.3

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται

ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί η αναγκαιότητα του «πρέπει» ($\Rightarrow$) και του «αρκεί» ($\Leftarrow$) σε αυτές.

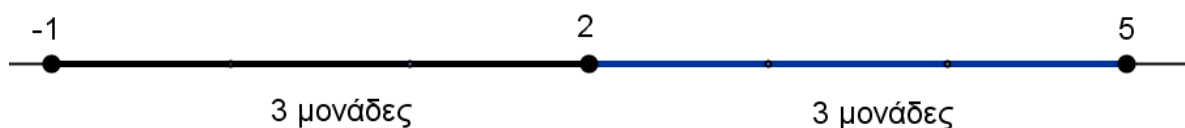
Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \text{ καθώς και}$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho \text{ καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση } |x - 2| < 3 \text{ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ.}$$

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5).$$



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$

και $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$. Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

§2.4

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα της χρήσης των ιδιοτήτων των ριζών, έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

Κεφάλαιο 3^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^y = a$. Ειδικότερα:

§3.1

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax + b = 0$, της οποίας οι συντελεστές a και b είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής $ax + b = 0$, για δυο κυρίως λόγους: α) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και β) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1^{ου} βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του λ (π.χ. $\lambda = 2$, $\lambda = 5$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α' Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η $|x - 5| = -3$, την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

§3.2

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^y = a$ να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

§3.3

Η επίλυση της εξίσωσης $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Κεφάλαιο 4^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού Ειδικότερα:

§4.1

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1^{ου} βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι $|x-5| < -3$ ή $|x-5| > -3$, των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1^{ου} βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

§4.2

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta < 0$, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β' Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Κεφάλαιο 5^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

§5.1

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας a , αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό a_1 που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ).

§5.2

Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το n -οστό όρο και το άθροισμα των n πρώτων όρων συγκεκριμένων αριθμητικών προόδων, με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α' Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Το να δοθούν απλώς οι τύποι του n -οστού όρου και του αθροίσματος των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου και στη συνέχεια οι μαθητές να επιδοθούν στην αλγοριθμική χρήση τους για την επίλυση ασκήσεων δεν είναι συμβατό με το πνεύμα του ΑΠΣ.

§5.3

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19, Δ.20 και Δ.21 του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του n -οστού όρου και του αθροίσματος των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου. Αν ο εκπαιδευτικός κρίνει ότι το επιτρέπουν ο χρόνος, που έχει στη διάθεσή του και το επίπεδο της τάξης, θα μπορούσαν να τεθούν υπό διαπραγμάτευση, τα παραδείγματα της §5.4, ως εφαρμογή της γεωμετρικής προόδου, με στόχο να συνδεθεί η έννοια με πραγματικές καταστάσεις.

Κεφάλαιο 6°

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλειπίες εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία - ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής: $f(x) = ax + \beta$ (§6.3), $f(x) = ax^2$ (§7.1) και $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ (§7.3).

Ειδικότερα:

§6.1 - §6.2

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.26 του ΑΠΣ).

§6.3

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας $\psi = ax + \beta$ στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων a και β στη γραφική παράσταση της $f(x) = ax + \beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y' στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου a σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

Κεφάλαιο 7°

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν μελετήσει παραβολές της μορφής $\psi = ax^2$. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν επιπλέον ιδιότητες αυτής της συνάρτησης. Επίσης, με αφετηρία την $\psi = ax^2$, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της f . Ειδικότερα:

§7.1

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί, στο Γυμνάσιο, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = ax^2$. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων $g(x) = x^2$ και $h(x) = -x^2$ με τη βοήθεια της γραφικής παράστασής τους, στη γενίκευση των παραπάνω συμπερασμάτων για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ) και στη συμβολική τους έκφραση.

§7.3

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ μέσω κατάλληλων μετατοπίσεων της $g(x) = ax^2$ και στη μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2 (ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ).

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές, με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, χαράσσουν τη γραφική παράσταση της $g(x) = ax^2$ για διάφορες τιμές του a . Τη μετατοπίζουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και παρατηρούν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια τη μετατοπίζουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$.

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x) = ax^2$, να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της f . Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της f και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $g(x) = ax^2$ στην $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.